MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2010-10-22.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Fredrik Lindgren, 076-272 1861.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. (a) Ge de fem axiomen för att en mängd G med en operation $\star$ är en (abelsk) grupp.
   (b) Ge ett exempel på en grupp $< G, \star >$ där G är en mängd med 7 element. (3p)

2. (a) Definiera begreppen *delare* och *primtal.*
   (b) Formulera Aritmetikens fundamentalsats.
   (c) Låt p vara ett primtal och $a, b \in \mathbb{Z}$. Visa att om $p \mid ab$ så gäller att $p \mid a$ eller $p \mid b$. (4p)

3. Vilka av följande formler för manipulation av summor är korrekta? För de som är korrekta motivera detta (noggrant). För de som inte är det, ge ett motexempel. Vi antar att n är ett godtyckligt positivt heltal och och övriga variabler är godtyckliga tal.

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

$$(c) \qquad \sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$(d) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^n = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n$$

(2p)

4. En skolklass består av 10 flickor och 8 pojkar. Man ska ta ut ett lag med 5 personer till en matematiktävling. Reglerna säger att det måste vara minst två flickor och minst två pojkar i laget. På hur många olika sätt kan man komponera laget? (Du måste räkna ut antalet sätt explicit för full poäng.) (3p)

Var god vänd!

5. (a) Primtalsfaktorisera 1615.

   (b) Bestäm det minsta primtal som är större än 1615. Motivera ditt svar *noggrant*. Tips: $\sqrt{1615} < \sqrt{1681} = 41$. (3p)

6. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot (3k+1) = n(n+1)^2$$

för alla positiva heltal n. (3p)

7. Låt $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vara definierad som att $s(n)$ är siffersumman av n, t ex är

$$s(17289) = 1 + 7 + 2 + 8 + 9 = 27.$$

Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{N}$ genom

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : s(a) = s(b)\}.$$

   (a) Motivera att detta är en ekvivalensrelation på $\mathbb{N}$.

   (b) Låt $[a]$ beteckna ekvivalensklassen av a m a p $\mathcal{R}$. Räkna upp alla tal i mängden

$$\{n \in \mathbb{N} : n < 1000 \text{ och } n \in [2]\}.$$

   (c) Är

$$[a] \oplus [b] := [a + b] \text{ respektive } [a] \otimes [b] := [ab]$$

korrekta definitioner av operatorer på ekvivalensklasserna? Motivering krävs. (4p)

8. Vilka positiva heltal kan skrivas som differensen mellan kvadraterna av två heltal. Formulera som en sats och försök bevisa den. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 3 november. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 8.30-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.