MATEMATIK
Göteborgs universitet
Tentamen i Linjär algebra, MMG200, 2008-12-19, kl. 8.30-13.30
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Ragnar Frej, 0762-721861.

OBS: Ange din personliga kod på omslaget.
Ange din personliga kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng.
För betyget 3 krävs minst 12 poäng sammanlagt, för VG krävs 18 poäng.

---

1. (a) Ge på parameterform den linje L i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna $(2,3,3)$ och $(1,1,0)$.

   (b) Bestäm det plan Π som är vinkelrätt mot L och som innehåller punkten $(-1,0,2)$. (2p)

2. Låt
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Visa att M har linjärt oberoende kolonner.

   (b) Visa att M har parvis ortogonala kolonner.

   (c) Vad är relationen mellan slutsatserna i (a) och (b) ovan? Den ena slutsatsen följer av den andra. Vilken följer av den andra? Motivera ditt svar och ge dessutom exempel på en matris som visar att den andra riktningen inte gäller i allmänhet. (3p)

3. För vilka värden på a har följande system mer än en lösning?
$$\begin{cases} x + 2y \phantom{{}+z} + u = 1 \\ x + 3y + z + 2u = 2 \\ \phantom{x+{}} y + 2z + u = 3 \\ x + 2y + z + u = a \end{cases}$$

   Ge, i parameterform, lösningsmängderna för alla sådana a. (3p)

4. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Visa att A^t är invers till B.

   (b) Ange A^{-1}.

   (c) Beräkna $Det(AB)$. (3p)

5. Vi har en linjär avbildar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^3$ som avbildar $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Ge matrisen A som motsvarar den linjära avbildningen.

   (b) Är avbildningen surjektiv? Glöm inte att motivera ditt svar!

   (c) Ge exempel på vektor $\mathbf{b}$ sådan att $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösning och visa att så är fallet.

   (d) Finner en bästa approximativ lösning, i minsta kvadratmetodens mening, i fallet med ditt valda högerled $\mathbf{b}$.

(4p)

6. Två heliga män, Abraham och Budda, som inte bryr sig om ägodelar ägnar sig åt följande bisarra ritual. Varje middag träffas de och ger varandra en viss del av sina ägodelar. Abraham ger alltid hälfen av sina saker till Budda, medan Budda ger en tredjedel av sina saker till Abraham. Asketer som de är ser de noga till att inte skaffa sig några nya ägodelar på något annat sätt.

   (a) Finn en matris M och en rekursivt formel $\mathbf{v}_{n+1} = M\mathbf{v}_n$ som anger hur ägodelarna flyttas mellan de heliga männen.

   (b) Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen M.

   (c) Använd dessa egenvärden och egenvektorer för att beräkna hur fördelningen av ägodelar blir på mycket lång sikt om Abraham hade a saker och Budda hade b när de började sin ritual.

   (d) Beror vem som blir rikast i slutet på vem som ägde vad i början?

(4p)

7. Låt A vara en kvadratisk matris som uppfyller ekvationen

$$A^2 + A + I = \mathbf{0}.$$

   (a) Visa att A är inverterbar.

   (b) Visa att $A^3 = I$.

   (c) Vad blir $Det(A)$?

(3p)

8. Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara tre vektorer i rummet sådana att $|\mathbf{u}| = 5$, $|\mathbf{v}| = 2$ och $|\mathbf{w}| = 1$. Vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ är $\frac{\pi}{3}$. Bestäm vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så att $|\mathbf{u} + 2\mathbf{v} + \mathbf{w}| = |\mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{w}|$. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 19 januari. Tentorna kan avhämtas på expeditionen för Matematiska vetenskaper mellan 8:30 och 13:00 varje vardag.

LYCKA TILL! Samuel.