MATEMATIK | Inga hjälpmedel
Göteborgs Universitet | Datum: 2011-04-26 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Adam Wojciechowski.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften.

(a) Planet $x + y - 2z = 1$ är vinkelrätt mot planet $2x + y + z = 0$.

(b) $\lambda = 1$ är ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) Två icke-parallella egenvektorer till en symetrisk matris måste vara vinkelräta.

(d) Om matriserna A och B har samma egenvärden så är $A = PBP^{-1}$ där P är inverterbar.

(e) Om A saknar egenvärde så är $\det A \neq 0$.

(f) Om A är en $m \times n -$ matris och Nul(A) har dimension 0 så är $m \geq n$.

(g) Om ekvatinssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning för något $\boldsymbol{b} \in R^m$ så måste A vara kvadratisk.

(h) Om ekvatinssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har entydig lösning för alla $\boldsymbol{b} \in R^m$ så måste A vara kvadratisk.

2. (a) Visa att om A är inverterbar så har ekvationen $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en entydig lösning.

(b) Visa att om A och B är ivnerterbara $n \times n -$ matriser så är också AB inverterbar.

(c) Visa att nollrummet till en är $m \times n -$ matris är ett undrrum till R^n.

3. Antag att A är en symmetrisk matris. Visa att om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är egenvektorer till A som hör till olika egenvärden så är de ortogonala.

4. Tre punkter i rummet är givna med koordinater i ett ON-system:

$$P_1 : (1, 0, 1),\ P_2 : (-1, 1, 1),\ P_3 : (2, 2, 0).$$

(a) Beräkna arean av triangeln med hörn i P_1, P_2, och P_3.

(b) Bestäm koordinaterna för tyngdpunkten till triangeln i (a).

5. Avgör för vilka värden på a som följande ekvationssystem har entydig lösning, många lösningar respektive ingen lösning.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -x & + & ay & + & 2z & = & 1 \\ -2x & + & 2y & + & az & = & a \end{array} \right. .$$

6. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en rät linje $y = at + b$ till följande mätdata.

t_i	0	1	2	3	4
y_i	6	4	2	1	-1

7. En linjär avbildning F i rummet avbildar punkterna $(1, 1, -2)$, $(-2, 1, 1)$, och $(0, -2, 1)$ på punkterna $(-4, 1, 3)$, $(2, -5, 3)$ respektive $(3, 2, -5)$. Alla punkter är givna med koordinater i en och samma bas. Bestäm noll-rummet till F.

8. Om den kvadratiska matrisen A vet vi att alla egenvärden är > 0 och att $A^3 = A$.
Visa att $A = I$, identitetsmatrisen.

Lycka till!
Sven