Lösningar, Envariabel, MMG200

14 januari 2011

1. (i) och (ii) Se kurslitteraturen.

   (iii) $|x|$

   (iv) Vi har

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \to 2x, h \to 0 \ .$$

2. Se kurslitteraturen.

3. Se kurslitteraturen.

4. Vi har $x^{x^2} = e^{\ln x^{x^2}} = e^{x^2 \ln x}$ så

$$Dx^{x^2} = e^{x^2 \ln x} D(x^2 \ln x) = x^{x^2}(2x \ln x + x) \ .$$

5.

$$\int_0^\pi e^{\cos x} \sin x dx = \left[\begin{array}{cc} t = \cos x, & 0 \mapsto 1 \\ dt = -\sin x dx, & \pi \mapsto -1 \end{array} \right]$$

$$= -\int_1^{-1} e^t dt = \int_{-1}^1 e^t dt = \left[e^t\right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} \ .$$

6. Derivering ger $f'(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$, och vi får följande teckentabell:

x	0		1		2		3
f'	$+$	$+ \ +$	0	$- \ -$	0	$+ \ +$	$+$
f	4	$\nearrow \ \nearrow$	9	$\searrow \ \searrow$	8	$\nearrow \ \nearrow$	13

Tabellen visar att det största värdet är 13.

7. Taylorutveckling ger $e^t = 1 + t + O(t^2), t \to 0$, så $e^{x^2} - 1 = x^2 + O(x^4)$, $x \to 0$. Vidare är $\arctan t = t + O(t^2), t \to 0$, så $\arctan(e^{x^2} - 1) = x^2 + O(x^4), x \to 0$. Dessutom är $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ eller $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + O(x^4)$, $x \to 0$. Så

$$\frac{\arctan(e^{x^2} - 1)}{1 - \cos x} = \frac{x^2 + O(x^4)}{x^2/2 + O(x^4)} = \frac{1 + O(x^2)}{1/2 + O(x^2)} \to \frac{1}{1/2} = 2, x \to 0 \; .$$

8. Etersom $y(0) = 0$ ger differentialekvationen $y'(x) = y^2(x) + 3x^2$ att $y'(0) = 0$. Derivering av differentialekvationen ger $y''(x) = 2y(x)y'(x) + 6x$ så $y''(0) = 0$. Ytterligare en derivering ger $y'''(x) = 2y'(x)^2 + 2y(x)y''(x) + 6$ och vi får $y'''(0) = 6$.

   Taylors formel ger

$$y(x) = 6\frac{x^3}{3!} + O(x^4) = x^3 + O(x^4), x \to 0 \; ,$$

   och alltså

$$\frac{y(x)}{x^3} = 1 + O(x) \to 1, x \to 0 \; .$$