Lösningar, Envariabel, MMG200

30 april 2011

1. (a), (b) och (c). Se kurslitteraturen.

   (d) Låt $N > 0$. Då gäller att $\sqrt{x} > N$ om $x > N^2$.

2. Se kurslitteraturen.

3. Se kurslitteraturen.

4. Vi har $z^3 - iz^2 + 4z - 4i = (z-i)(z^2+4) = 0$ om $x = i$ eller $x = \pm 2i$.

5. Eftersom $\dfrac{2x}{1+x^4}$ är udda gäller $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x}{1+x^4}dx = 0$. Så
$$\int_{-1}^{1} \frac{1+2x+x^4}{1+x^4}dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2.$$

6. Derivering ger
$$f'(x) = e^{-x^2-4}(6x^5 - x^6(2x+4)) = -x^5e^{-x^2-4}(x-1)(2x+6)\ .$$
   Så $f'(x) > 0$ om $0 \leq x < 1$, $f'(1) = 0$ och $f'(x) < 0$ om $x > 1$. Så $f(x)$ har ett största värde e^{-5} som antas då $x = 1$.

7. Skriv differentialekvationen som $\dfrac{dy}{1+y^2} = dx$. Vi får $\arctan y = x + C$. Villkoret $y(0) = 1$ ger $C = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$. Så $\arctan y = x + \dfrac{\pi}{4}$. Om $-\dfrac{3}{4}\pi < x < \dfrac{1}{4}\pi$ ger detta $y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4})$.

8. Vi har
$$\lim_{x\to\infty}((x^6+2x^4)^{1/3} - x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^{1/3} - 1\right) =$$
$$= [t = \frac{2}{x^2}] = \lim_{t\to 0+} \frac{2}{t}\left((1+t)^{1/3} - 1\right)\ .$$
   Om $g(t) = (1+t)^{1/3} - 1$ gäller $g(0) = 0$ och $g'(0) = \dfrac{1}{3}$. Så Taylors formel ger
$$\lim_{x\to\infty}((x^6+2x^4)^{1/3} - x^2) = \lim_{t\to 0+} \frac{2}{t}\left(\frac{t}{3} + O(t^2)\right) = \frac{2}{3}\ .$$