MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2012-10-26.

1. (a) Det är en delmängd till $A \times B$, alltså $R \subseteq A \times B$.

   (b) Man kan låta $f_R(a) = \{b \in B : aRb\} \in \mathcal{P}(B)$ för $a \in A$. Man får då att
   $$aRb \Longleftrightarrow b \in f_R(a)$$
   så detta är en lämplig representation av relationen.

2. (a) Se häftet "Talsystem och restaritmetiker".

   (b) Man kan ta $G = \mathbb{Z}_{11}$ och operationen addition av klasser modulo 11.

3. (a) Se boken sidorna 55 och 58.

   (b) Se boken sidan 67.

   (c) Se boken sidan 69.

4. Vi tar ut de två lagen som ska spela basket först. Då ska vi först välja 4 personer till ett av lagen bland 16 personer och sedan 4 personer till andra laget bland de 12 som är kvar. Detta kan göras på
   $$n_1 = \binom{16}{4}\binom{12}{4}$$
   sätt. Fast då räknar vi dubbelt för man kan permutera de två lagen utan att ändra valet så det blir $n_1/2$ möjliga val för basketlagen. Därefter är det dags att ta ut de två innebandylagen. Man kan välja ut ett lag på $\binom{8}{4}$ olika sätt och sedan är det andra laget bestämt. Men nu räknar vi återigen dubbelt för att välja 4 personer blir samma som att välja de andra 4 personerna. Totalt får vi alltså
   $$\frac{\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}}{4} (= 15'765'750).$$

5. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: Vi behöver två fall $n = 3$ och $n = 4$. Vi har
   $$\begin{aligned} L(3) &= L(2) + L(1) = b + a \\ bF(3-1) + aF(3-2) &= b + a \end{aligned}$$
   och
   $$\begin{aligned} L(4) &= L(3) + L(2) = (b+a) + b = 2b + a \\ bF(4-1) + aF(4-2) &= b \cdot 2 + a \cdot 1 = 2b + a \end{aligned}$$
   så båda basfallen stämmer.

Induktionssteg: Antag att det är sant för alla k sådana att $k \leq n$ där $n \geq 4$ och visa att då är det också sant för $n+1$. Genom att utnyttja induktionsantagandet och rekursionen för Fibonacci-talen så får vi

$$\begin{aligned}
L(n+1) &= L(n) + L(n-1) \\
&= bF(n-1) + aF(n-2) + bF(n-1-1) + aF(n-1-2) \\
&= b(F(n-1) + F(n-2)) + a(F(n-2) + F(n-3)) \\
&= bF(n) + aF(n-1)
\end{aligned}$$

vilket var precis vad vi skulle visa.

Enligt induktionsprincipen är påståendet därmed sant för alla positiva heltal $n > 2$.

6. (a) En möjlig lösning är att testa alla de tolv möjliga talen och se vilka det stämmer för. (Detta är egentligen enda sättet som framgår av kurslitteraturen. Dock har det nämnts att man kan använda sig av ett resultat som anges nedan som ger följande elegantare lösning.) Alternativt kan man kvadratkomplettera (alla kongruenser är modulo 13)

$$x^2 + x - 4 \equiv x^2 + 14x - 4 = (x+7)^2 - 53 \equiv (x+7)^2 - 1$$

vilket ger att ekvationen är ekvivalent med

$$(x+7)^2 - 1 \equiv 3 \iff (x+7)^2 \equiv 4 \iff x + 7 \equiv \pm 2.$$

(Den sista ekvivalensen följer av att ekvationen $x^2 \equiv a \pmod{p}$ alltid har antingen 0 eller 2 lösningar om p är primtal och $a \neq 0$, alternativt testar man snabbt alla kvadrater och ser att det är precis ± 2 vars kvadrat blir 4 modulo 13.) Detta ger att $x \equiv -7 + 2 \equiv 8$ eller $x \equiv -7 - 2 \equiv 4$. Kontroll av $x = 8$ och $x = 4$ i ekvationen visar att vi räknat rätt.

(b) Vi har att

$$666 = 13 \cdot 51 + 3,$$

så $666 \equiv 3 \pmod{13}$. Tar vi potenser så får vi att

$$666^2 \equiv 9 \pmod{13} \text{ och } 666^3 \equiv 3 \cdot 9 = 27 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Eftersom $666 = 3 \cdot 222$ så får vi att

$$666^{666} = (666^3)^{222} \equiv 1 \pmod{13}.$$

Svaret är alltså $x = 1$.

7. (a) Vi får en funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to C,$$

eftersom det bara finns exakt en cirkel med givet centrum som går genom en annan given punkt.

(b) Funktionen är inte injektiv, eftersom t.ex. $((0,0),(1,0))$ och $((0,0),(0,1))$ båda avbildas på cirkeln med centrum i origo och radien 1.

(c) Funktionen är surjektiv, ty om man tar en cirkel i $\mathbb{R}^2$ så har den definitivt både centrum och någon punkt i $\mathbb{R}^2$.

(d) Radien i en cirkel med centrum i (r, s) och som går genom (p, q) är uppenbarligen avståndet mellan dessa två punkter. Det ger att

$$(h \circ f)((r, s), (p, q)) = \pi((p - r)^2 + (q - s)^2).$$

8. Antag först att det finns $p, q \in \mathbb{N}$ sådana att $n = p^2 - q^2$ och $p - q > 1$. Vi ska visa att i så fall är n inte ett primtal. Vi får

$$n = p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$$

och dessutom är $p + q \geq p - q > 1$ så vi har en icketrivial faktorisering av n som således ej är primtal.

Omvänt så antag att n inte är ett primtal. Vi ska då visa att det finns $p, q \in \mathbb{N}$ som uppfyller de föreskrivna kraven. Eftersom n ej är primtal så finns det en icketrivial faktorisering $n = rs$ med $r \geq s > 1$ och r och s udda (kom ihåg att vi antog n udda från början). Vi får då

$$n = rs = ((r + s)/2)^2 - ((r - s)/2)^2.$$

Sätt $p = (r + s)/2$ och $q = (r - s)/2$. Då gäller att $p, q \in \mathbb{N}$ ty $r \pm s \geq 0$ och jämna. Dessutom gäller att $p - q = s > 1$ och saken är klar.