MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2012-10-26.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jakob Hultgren, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. (a) Ge definitionen av att R är en relation från A till B.

   (b) Man skulle kunna representera en relation R från A till B som en funktion
   $$f_R : A \to \mathcal{P}(B),$$
   där $\mathcal{P}(B)$ är potensmängden av B. Hur då? (Tips: Om R är en ekvivalensrelation (så speciellt $A = B$) så är $f_R(a)$ lika med ekvivalensklassen av a.) (2p)

2. (a) Ge de fem axiomen för att en mängd G med en operation $\star$ är en (abelsk) grupp.

   (b) Ge ett exempel på en grupp $< G, \star >$ där G är en mängd med 11 element. (3p)

3. (a) Definiera begreppen *delare* och *primtal*.

   (b) Formulera Aritmetikens fundamentalsats.

   (c) Visa att det finns oändligt många primtal. (4p)

4. I en klass på 16 personer ska man dela upp i fyra lag med 4 personer i varje. Två av lagen ska spela basket mot varandra och de andra två ska spela innebandy mot varandra på gymnastiken. På hur många sätt kan man göra denna uppdelning? (Det räcker att svara med fakulteter och/eller binomialkoefficienter.) (3p)

5. Vi definierar Lucas-talen med startvärden a och b att vara talföljden $L(n)$ som definieras rekursivt genom
   $$\begin{cases} L(1) = a, \\ L(2) = b, \\ L(n) = L(n-1) + L(n-2), \ n > 2. \end{cases}$$
   Speciellt ser vi att Fibonacci-talen $F(n)$ är specialfallet då $a = b = 1$. Låt $L(n)$ vara Lucas-talen med startvärden a och b. Visa att då är
   $$L(n) = bF(n-1) + aF(n-2)$$
   för alla $n > 2$. (3p)

Var god vänd!

6. (a) Bestäm alla heltal x i intervallet $1 \leq x \leq 12$ sådana att

$$x^2 + x - 4 \equiv 3 \pmod{13}.$$

(b) Bestäm det minsta positiva heltal x sådant

$$x \equiv 666^{666} \pmod{13}.$$

(3p)

7. Låt $C = \{\text{cirklar i } \mathbb{R}^2\}$. Vi antar att C även innehåller cirklar med radien 0, dvs. punkter $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Arean av en cirkel är πr^2 där r är radien i cirkeln. Avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) i $\mathbb{R}^2$ ges enligt Pythagoras sats av

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

(a) Till ett par av par $((r, s), (p, q)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ associerar vi alla cirklar som har centrum i punkten (r, s) och som går genom punkten (p, q). Motivera noggrannt att detta definierar en funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to C.$$

(b) Är funktionen f injektiv?

(c) Är funktionen f surjektiv?

(d) Definiera $h : C \to \mathbb{R}$ som $h(c) =$ arean av c. Ge en explicit formel för den sammansatta funktionen

$$h \circ f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Alla svar måste motiveras. (4p)

8. Låt n vara ett udda naturligt tal med $n > 1$. Visa att n är inte ett primtal *om och endast om* det finns naturliga tal p, q sådana att $n = p^2 - q^2$ och $p - q > 1$. (Tips: $rs = ((r + s)/2)^2 - ((r - s)/2)^2$.) (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 9 november. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 9.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.