Lösningar, Envariabel, MMG200

16 januari 2010

1. Se kurslitteraturen.

2. Se kurslitteraturen.

3. Se kurslitteraturen.

4.
$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}dx = \begin{bmatrix} t = x^2, & 0 \mapsto 0 \\ dt = 2xdx, 1 \mapsto 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$$
$$= [\arctan t]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} \,.$$

5. Vi har $e^t = 1 + t + O(t^2), t \to 0$, så $e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4), x \to 0$. Dessutom gäller $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + O(x^3)$ och $\sin x = x + O(x^3)$, $x \to 0$. Detta ger
$$\frac{e^{x^2} - \cos x}{x \sin x} = \frac{1 + x^2 - 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^3)}{x^2 + O(x^4)} = \frac{\frac{3}{2} + O(x)}{1 + O(x)} \to \frac{3}{2}, x \to 0 \,.$$

6. Den homgena ekvationen $y'' + y' - 2y = 0$ har den karakteristiska ekvationen $r^2 + r - 2 = 0$ med rötterna $r = 1$ och $r = -2$. Så $y_h(x) = Ae^x + Be^{-2x}$.

   För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y = Cx + D$. Då är $y' = C$ och $y'' = 0$. Vi får $C - 2Cx - 2D = x$ vilket ger $C = -\frac{1}{2}$ och $D = -\frac{1}{4}$. Alltså är $y_p(x) = -\frac{1}{4}(2x+1)$.

   Den allmänna lösningen är alltså $y(x) = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{1}{4}(2x+1)$.

   Begynnelsevärden. Vi har $y'(x) = Ae^x - 2Be^{-2x} - \frac{1}{2}$. Så begynnelsevillkoren ger
$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{4} \\ A - 2B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

med lösningen $A = \frac{1}{3}$ och $B = -\frac{1}{12}$.

Den sökta lösningen är alltså $y(x) = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{12}e^{-2x} - \frac{1}{4}(2x+1)$
$= \frac{1}{12}(4e^x - e^{-2x} - 6x - 3)$.

7. Om $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x - 1$ så är $f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3 = 3(x^2 + 2ax + 1) = 3((x+a)^2 + (1-a^2)) > 0$ för alla x eftersom $|a| < 1$. Så f är strängt växande. Dessutom gäller $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Alltså har ekvationen $f(x) = 0$ exakt en reell rot r. Observera att eftersom $f'(r) > 0$ är r en enkelrot.

   Tredjegradsekvationen $f(z) = 0$ har precis 3 komplexa rötter. Eftersom precis en är reell är två av rötterna icke-reella.

8.

$x(t)$

300 $\quad$ $d(t)$

   Låt $x(t)$ vara fågelns läge vid tiden t, och t_0 den tid då $d(t_0) = 500$ (se figuren). Då gäller $x(t_0) = 400$. Dessutom är $d^2(t) = 300^2 + x(t)^2$ och derivering ger $2d(t)d'(t) = 2x(t)x'(t)$. När $t = t_0$ ger detta $500\,d'(t_0) = 400 \cdot 10$ och $d'(t_0) = 8$.