# Lösningar, Envariabel, MMG200

7 april 2010

1. (a)-(c), 2. och 3.

Se kurslitteraturen.

1(d). Vi har $X = \{x \in \mathbb{R}; x^4 < 4\} = \{x \in \mathbb{R}; -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$. Så $\sup X = \sqrt{2}$.

4. Partiell integration ger

$$\int_0^1 2x \arctan x \, dx = \left[x^2 \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx =$$

$$\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4} - \left(1 - [\arctan x]_0^1\right) = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 \ .$$

5. Vi har $1 - \cos x = \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$. Så

$$\frac{\sin x^3 (1 - \cos x)}{x^5} = \frac{\sin x^3}{x^3} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \to 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, x \to 0,$$

eftersom $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

6. Vi har $f'(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2} = (1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x)e^{-x^2}$. Så $f'$ är positiv då $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ och negativ då $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alltså är $f$ växande då $0 \leq x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ och avtagande då $x > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Det följer att $f$ antar sitt största värde för $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ med värdet $f(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$.

7. Vi har $\cos x \; y'(x) - \sin x \; y(x) = (\cos x \; y(x))'$ och alltså $(\cos x \; y(x))' = \sin x$. Detta ger $\cos x \, y(x) = -\cos x + C$ och $y(x) = -1 + \dfrac{C}{\cos x}$. Begynnelsevilkoret $y(0) = 0$ ger $C = 1$ och alltså $y(x) = -1 + \dfrac{1}{\cos x}$.

8. Vi gör ett motsägelsebevis. Antag att $f'(x) \leq 1$ för alla $x \in [0,1]$. Sätt $g(x) = f(x) - x$. Då gäller $g(0) = g(1) = 0$ och $g'(x) = f'(x) - 1 \leq 0$, $x \in [0,1]$. Så $g$ är en avtagande funktion med $g(0) = g(1)$ och alltså konstant. Så $g'(x) = 0$, $x \in [0,1]$. Men detta motsäger att $g'(\eta) = f'(\eta) - 1 = 0 - 1 = -1$.

   En alternativt lösning är att observera att eftersom $f'(\eta) = \lim_{\delta \to 0} \dfrac{f(\eta+\delta) - f(\eta)}{\delta}$, ger $f'(\eta) = 0$, att $f(\eta+\delta) - f(\eta) \leq \frac{1}{2}\delta$ om $\delta > 0$ är tillräckligt litet. Nu är $1 = f(1) - f(0) = \big(f(1) - f(\eta+\delta)\big) + \big(f(\eta+\delta) - f(\eta)\big) + \big(f(\eta) - f(0)\big)$. Enligt medelvärdessatsen gäller $f(1) - f(\eta+\delta) = f'(\xi_1)(1-\eta-\delta) \leq 1 - \eta - \delta$ och $f(\eta) - f(0) = f'(\xi_2)\eta \leq \eta$. Så $1 \leq 1 - \eta - \delta + \frac{1}{2}\delta + \eta < 1 - \frac{1}{2}\delta$, så vi har vår önskade motsägelse. (Om $\eta = 1$ behöver argumentet justeras en aning.)