MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2013-10-25.

1. (a) Se boken sidan 91.
   (b) Se boken sidan 93.
   (c) Se boken sidan 93.

2. (a) Se boken sidan 66.
   (b) Man kan ta $p = 4$ och $a = b = 2$. Då gäller $p \mid ab$, men $p \nmid a$ och $p \nmid b$.
   (c) Om p inte är ett primtal så är $p = rs$ för några heltal $1 < r, s < p$. Sätt $a = r$ och $b = s$. Då gäller att $p \mid ab$, men $p \nmid a$ och $p \nmid b$.

3. Se boken sidan 69.

4. (a) Vi ska göra 4 val. Tusental har 9 alternativ (ej 0), hundratal och tiotal har 10 alternativ vardera, och ental har 5 alternativ. Totalt blir det enligt multiplikationsprincipen $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.
   (b) Det är lättare att räkna de som inte innehåller 5. Då får vi ett mindre alternativ i samtliga fyra val, så totalt blir det $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 4 = 2592$ som *inte* innehåller en femma. Svaret blir då det totala antalet minus detta så: $4500 - 2592 = 1908$.

5. Euklides algoritm ger:

$$\begin{aligned} 97 &= 1 \cdot 54 + 43 \\ 54 &= 1 \cdot 43 + 11 \\ 43 &= 3 \cdot 11 + 10 \\ 11 &= 1 \cdot 10 + 1 \end{aligned}$$

   Alltså är $\mathrm{sgd}(97, 54) = 1$. Vi ersätter successivt de erhållna resterna och får:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 1 \cdot 10 = 11 - (43 - 3 \cdot 11) = 4 \cdot 11 - 1 \cdot 43 \\ &= 4(54 - 1 \cdot 43) - 1 \cdot 43 = 4 \cdot 54 - 5 \cdot 43 \\ &= 4 \cdot 54 - 5(97 - 54) = 9 \cdot 54 - 5 \cdot 97. \end{aligned}$$

   En lösning är alltså $x = -5 \cdot 6 = -30$ och $y = 9 \cdot 6 = 54$. Alla lösningar ges därmed av $x = -30 + 54n$ och $y = 54 - 97n$ med $n \in \mathbb{Z}$.

6. Vi gör total induktion över n.

   Vi behöver 3 basfall eftersom rekursionen har 3 startvärden. Eftersom vi har $T_1 = T_2 = T_3 = 1$ och $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ respektive $2^3 = 8$ så stämmer olikheten för $n = 1, 2, 3$.

Antag nu att olikheten gäller för alla $n \leq k$ för något $k \geq 3$. Då får vi för $n = k + 1$ att

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= T_k + T_{k-1} + T_{k-2} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} \\ &= 2^{k-2}(2^2 + 2 + 1) < 2^{k-2} \cdot 8 = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Alltså gäller olikheten för $n = k + 1$.

Med stöd av basfallen och induktionssteget ovan så ger induktionsprincipen att olikheten gäller för alla $n \geq 1$.

7. (a) Vi beräknar $s(n)$ för alla $1 \leq n \leq 10$:

$$\begin{aligned} s(1) &= 0 \\ s(2) &= 1 \\ s(3) &= 1 \\ s(4) &= 1 + 2 = 3 \\ s(5) &= 1 \\ s(6) &= 1 + 2 + 3 = 6 \text{ Perfekt!} \\ s(7) &= 1 \\ s(8) &= 1 + 2 + 4 = 7 \\ s(9) &= 1 + 3 = 4 \\ s(10) &= 1 + 2 + 5 = 8. \end{aligned}$$

Vi ser att bara 6 är perfekt.

(b) Eftersom $q = 2^p - 1$ är ett primtal så har n bara två primtalsdelare: 2 och q. Det betyder att alla positiva delare till n som är mindre än n ges av

$$\{1, 2, 2^2, \ldots, 2^{p-1}, q, 2q, \ldots, 2^{p-2}q\}.$$

Vi får att

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^k + \sum_{k=0}^{p-2} 2^k q = \frac{2^p - 1}{2 - 1} + q\frac{2^{p-1} - 1}{2 - 1} \\ &= 2^{p-1}(2 + q) - (1 + q) = 2^{p-1}(2^p + 1) - 2^p \\ &= 2^{p-1}(2^p + 1 - 2) = 2^{p-1}(2^p - 1) = n, \end{aligned}$$

och alltså är n perfekt.

8. (a) Vi visar att det är reflexiv, symmetrisk och transitiv.

Reflexiv: Vi har $a \star a' = e \in H$ så $a\mathcal{R}a$ och därmed är den reflexiv.

Symmetrisk: Antag $a\mathcal{R}b$ så $a \star b' \in H$. Eftersom H är en grupp så gäller att även $(a \star b')' \in H$. Men

$$(a \star b')' = a' \star (b')' = a' \star b = b \star a',$$

så $b \star a' \in H$ dvs $b\mathcal{R}a$ och därmed är den symmetrisk. I kalkylen utnyttjade vi i ordning räkneregel för invers av produkt, invers av invers samt kommutativitet.

Transitiv: Antag $a\mathcal{R}b$ och $b\mathcal{R}c$ så $a \star b' \in H$ och $b \star c' \in H$. Det ger då om vi utnyttjar associativitet och kommutativitet ett par gånger samt identitet och invers att

$$(a \star b') \star (b \star c') = (a \star c') \star (b \star b') = a \star c'.$$

Men eftersom $\star$ är en operation på H så gäller att $(a \star b') \star (b \star c') \in H$. Därmed gäller att $a \star c' \in H$, d v s $a\mathcal{R}c$. Alltså är den också tranisitiv.

Eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är den per definition en ekvivalensrerlation.

(b) Antag $[a] = [c]$ och $[b] = [d]$, så $a\mathcal{R}c$ och $b\mathcal{R}d$ d v s $a \star c' \in H$ och $b \star d' \in H$. Vi ska visa att $[a \star b] = [c \star d]$, d v s $(a \star b) \star (c \star d)' \in H$. Vi får genom att använda regeln för invers av produkt samt gruppaxiomen att

$$(a \star b) \star (c \star d)' = (a \star b) \star (c' \star d') = (a \star c') \star (b \star d') \in H,$$

eftersom $\star$ är en operation på H och $a \star c' \in H$ och $b \star d' \in H$. Alltså är $\star$ väldefinierad.

Vi får att $*$ är kommutativ från kommutativiteten hos $\star$, ty

$$[a] * [b] = [a \star b] = [b \star a] = [b] * [a].$$

Associativiteten visas analogt där man utnyttjar att $\star$ är associativ.

Vi ser direkt att $[e]$ är en identitet, eftersom $[a] * [e] = [a \star e] = [a]$.

Till slut givet $[a]$ låt a' vara inversen till a i G. Då är

$$[a] * [a'] = [a \star a'] = [e],$$

så $[a']$ är invers till $[a]$.

Alltså uppfyller $\langle K, * \rangle$ alla axiomen för att vara en grupp.