MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2013-10-25.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Cornelia Jareteg, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Låt A vara en mängd och R en relation på A.
   (a) Ge definitionerna av att R är reflexiv, symmetrisk respektive transitiv.
   (b) Ge definitionen av en partition av A.
   (c) Beskriv hur en partition på ett naturligt sätt ger upphov till en ekvivalensrelation. Glöm inte att kort motivera att det blir en ekvivalensrelation. (3p)

2. Alla variabler i uppgiften tar värden i heltalen.
   (a) Visa att om p är ett primtal och $p \mid ab$ så gäller att $p \mid a$ eller $p \mid b$.
   (b) Ge ett exempel som visar att det inte gäller för alla heltal $p \geq 2$.
   (c) Visa att villkoret att p är ett primtal är helt nödvändigt, mer precist visa att det inte gäller för $p \geq 2$ om p inte är ett primtal. (4p)

3. Visa att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal. (2p)

4. I den här uppgiften krävs svar med uträknat heltal för full poäng.
   (a) Hur många udda positiva fyrsiffriga heltal finns det?
   (b) Hur många udda positiva fyrsiffriga heltal som innehåller siffran 5 finns det? (3p)

5. Lös den diofantiska ekvationen $97x + 54y = 6$, d v s bestäm *alla* heltalslösningar till ekvationen. (3p)

6. Vi definierar "Tribonacciföljden" på följande sätt

$$T_n = \begin{cases} 1, & \text{om } 1 \leq n \leq 3 \\ T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}, & \text{om } n \geq 4 \end{cases}$$

   Bevisa att $T_n < 2^n$ för alla positiva heltal n. (3p)

Var god vänd!

7. Låt n vara ett positivt heltal. Vi definierar divisorsumman av n, $s(n)$, som summan av alla positiva delare till n som är **mindre** än n. Till exempel är

$$s(20) = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22.$$

Man säger att ett tal n är *perfekt* om $s(n) = n$.

(a) Bestäm alla perfekta tal mindre än eller lika med 10. Motivera ditt svar.

(b) Antag att $2^p - 1$ är ett primtal (där p är ett primtal). Visa att i så fall är

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

perfekt. (Tips: Försök bestämma delarna till n och utnyttja att du får geometriska summor när du summerar dem.)

(3p)

8. Låt $\langle G, \star\rangle$ vara en grupp med identitet e och låt $H \subseteq G$ vara sådan att också $\langle H, \star\rangle$ är en grupp. Speciellt gäller då att $e \in H$. Man säger då att $\langle H, \star\rangle$ är en delgrupp till $\langle G, \star\rangle$. Vi definierar nu en relation $\mathcal{R}$ på G genom att sätta

$$a\mathcal{R}b \iff a \star b' \in H,$$

där b' är inversen av b i $\langle G, \star\rangle$.

(a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på G. (Du får använda dig av alla de resultat vi visat för grupper, men var noga med att bara göra ett steg i taget så att det är lätt att se vilken regel du använder och ange gärna vilken regel det är.)

(b) Låt $[a]$ beteckna ekvivalensklassen av $a \in G$ med avseende på $\mathcal{R}$ och låt K vara mängden av alla ekvivalensklasser. Man kan definiera en operation på K genom att sätta

$$[a] * [b] = [a \star b].$$

Visa att denna är väldefinierad, d v s att den inte beror på valet av representanter för klasserna, och att $\langle K, *\rangle$ är en grupp.

(4p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 15 november. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 9.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.