MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2011-12-16 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Ragnar Freij.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften. Om inget annat sägs är A en $m \times n$ - matris.
   (a) En 3×3 – matris har alltid minst en egenvektor.
   (b) Linjen $x = y = z$ är paralell med planet $x + y + z = 0$.
   (c) Om $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_p}$ är linjärt beroende vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ så är var och en av dem en linjärkombination av de övriga.
   (d) Om $\boldsymbol{x} \in$ nollrummet till A och $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ så är $\boldsymbol{x}$ en egenvektor till A.
   (e) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ så är även $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ en lösning.
   (f) Låt $\boldsymbol{v_1}, ..., \boldsymbol{v_4}$ vara fyra vektorer i $\boldsymbol{R}^5$. Om då $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ är linjärt beroende så är också $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$ linjärt beroende.
   (g) Det finns en 4×5 – matris sådan att kolonnrummet och nollrummet har samma dimension.
   (h) Om A är kvadratisk så har $(\text{Col } A)^{\perp}$ samma dimension som Nul A.

2. (a) Låt $T : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ vara en linjär avbildning. Visa att T är injektiv (one-to-one) om och endast om ekvationen $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ endast har den triviala lösningen $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
   (b) Visa att kolonnrummet till en $m \times n$ – matris är ett underrum till $\boldsymbol{R}^m$.

3. Bevisa den associativa lagen för matrismultiplikation, $A(BC) = (AB)C$. Det får anses känt att $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ för en kolonnvektor $\boldsymbol{x}$.

4. (a) Bestäm ekvationen för det plan som är vinkelrätt mot båda planen $x+y+2z = 2$ och $2x+y+z = 1$ och som innehåller punkten $(1, -1, -1)$.
   (b) Bestäm skärningslinjen mellan de två planen på parameterform.

5. Bestäm, för varje värde på a, dimensionen på kolonnrummet (dvs rangen) till matrisen $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Lös approximativt med minstakvadratmetoden ekvationssystemet $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ x & = & 2 \\ y & = & 1 \\ y & = & 2 \\ x+y & = & 1 \end{array} \right.$

   Bestäm också felvektorn .

7. Bestäm talföljderna x_n och y_n om $x_0 = 1$, $y_0 = -3$ och $\left\{ \begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 5x_n + 3y_n \\ y_{n+1} & = & 3x_n + 5y_n \end{array} \right.$.

8. Låt $F(\boldsymbol{u})$ vara den ortogonala projektionen av $\boldsymbol{u}$ på det underrum till $\boldsymbol{R}^4$ som spänns av vektorerna $(1, 2, 1, 0)^T$ och $(2, 1, 2, 1)^T$. Bestäm avbildningsmatrisen för F.

Lycka till!
Sven