MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2012-04-10 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Hossein Raufi.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften. Om inget annat sägs är A en $m \times n$ - matris.
   (a) Om $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$ är linjärt beroende så är också $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ linjärt beroende.
   (b) Om A och B är kvadratiska matriser och AB är inverterbar så är A och B också inverterbara.
   (c) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ så är även $2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}$ en lösning.
   (d) Det finns en matris A sådan att kolonnerna i A är linjärt beroende och ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ har entydig lösning.
   (e) Om ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ endast har reella rötter så är A diagonaliserbar.
   (f) Om A saknar egenvärde så är $\det A \neq 0$.
   (g) Linjen $x = y = z$ är vinkelrät mot planet $x + y + z = 0$.
   (h) Fem vektorer i R^4 är allid linjärt beroende.

2. Formulera och bevisa Pythagoras sats i R^n

3. Antag att A är en symmetrisk matris. Visa att om $\boldsymbol{u}$ och $\boldsymbol{v}$ är egenvektorer till A som hör till olika egenvärden så är de ortogonala.

4. Bestäm ekvationen får det plan som innehåller linjen $(x, y, z) = (1, -1, 2) + t(1, 1, -1)$ och punkten (0,-1,1).

5. Avgör för vilka värden på a som följande ekvationssystem har entydig lösning, många lösningar respektive ingen lösning.
$$\begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ x - ay + 2z = 1 \\ ax - 4y + 4z = 2 \end{cases}.$$

6. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Bestäm var sin bas för nollrummet och kolonnrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -6 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

8. Visa att om A är en kvadratisk matris sådan att summan av elementen i varje rad är lika med noll så är $\det A = 0$.

Lycka till!
Sven