MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2012-08-22 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: .
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften. Om inget annat sägs är A en $m \times n$ - matris.

   (a) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = 0$ så är även $2\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}$ en lösning.

   (b) Om $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}$ är linjärt oberoende så är också $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}$ linjärt oberoende.

   (c) $\lambda = 0$ är ett egenvärde till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) om A är kvadratisk och $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ har lösning för varje b så är $\det A \neq 0$.

   (e) En 4×4 – matris har alltid minst en reell egenvektor.

   (f) Linjerna $x = y = z$ och $x = y = -2z$ är vinkelräta mot varandra.

   (g) Om $\operatorname{Nul} A$ och $\operatorname{Col} A$ har samma dimension så måste A vara kvadratisk.

   (h) Om AB är kvadratisk så är A och B också kvadratiska.

2. Antag $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_p\}$ är en ortonormalbas i R^p och att $\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_p\boldsymbol{u}_p$.
   Härled en formel för koefficienterna c_j uttryckta med hjälp av $\boldsymbol{y}$ och basvektorerna.

3. Visa att om T är en linjär avbildning från R^n till R^m så är $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ där kolonnerna i A utgörs av vektorerna $T(\boldsymbol{e_1}), \ldots, T(\boldsymbol{e_1})$ där+ $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ är standardbasen i R^n.

4. Givet punkterna $P_1 = (1, -1, 1)$, $P_2 = (2, 0, -1)$, $P_3 = (3, -2, 3)$ och $P_4 = (2, -1, 0)$ i en ON-bas i rummet.

   (a) Beräkna volymen av tetraedern med hörn i dessa punkter.

   (b) Bestäm ekvationen för den linje som går genom P_1 och mittpunkten på sträckan P_2P_3.

5. Bestäm en bas för kolonnrummet och en bas för nollrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & -3 & 8 \\ -3 & -6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

6. Anpassa med hjälp av minsta kvadratmetoden en andragradskurva $y = at^2 + bt + c$ till följande mätdata.

t_i	-1	0	1	2
y_i	1	0	1	2

7. Bestäm en inverterbar matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 9 \\ -5 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Bestäm den ortogonala projektionen av vektorn $(1, 0, 1, 0)^T$ på det underrum till $\boldsymbol{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 0, 1)^T$ och $(0, 1, 1, 0)^T$.

Lycka till!
Sven