MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2012-12-21 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Tommy Gustavsson.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften. Om inget annat sägs är A en $m \times n$ - matris.
   (a) Planet $x + 2y - z = 0$ är vinkelrätt mot planet $x - y - z = 6$.
   (b) Om $\boldsymbol{x_1}$ och $\boldsymbol{x_2}$ båda är lösningar till ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ så är även $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$ en lösning.
   (c) Om $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_4}$ är linjärt beroende vektorer i $\boldsymbol{R}^3$ så är var och en av dem en linjärkombination av de övriga.
   (d) Det finns en 4×7 – matris sådan att kolonnrummet och nollrummet har samma dimension.
   (e) Vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
   (f) Om $A = PBP^{-1}$ där P är inverterbar så har A och B samma egenvärden
   (g) Om A har 3 pivotkolonner så är $\mathrm{Col}(A)$ en delmängd av R^3.
   (h) Om A är en 4×5–matris med 3 pivokolonner så har nollrummet till A dimensionen 2.

2. (a) Visa att nollrummet till en är $m \times n$ – matris är ett undrrum till R^n.
   (b) Visa att kolonnrummet till en $m \times n$ – matris är ett underrum till $\boldsymbol{R}^m$.
   (c) Visa att om A och B är iverterbara $n \times n$ – matriser så är också AB inverterbar.

3. Visa att om A är en $n \times n$-matris som har n stycken linjärt oberoende egenvektorer så är A diagonaliserbar.

4. Bestäm ekvationen får det plan som innehåller punkterna $(1, 2, -1)$, $(2, 2, 1)$ och $(0, 1, 2)$.

5. (a) Visa att $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ inte ligger i kolonnrummet till $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   (b) Lös approximativt med minstakvadratmetoden ekvationssystemet $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   Bestäm också felvektorn .

6. Bestäm för varje värde på a kolonnrummets och nollrummets dimension, samt en bas för kolonnrummet, för matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

7. Lös differentialekvationssystemet $\begin{cases} x'(t) &= 2y(t) \\ y'(t) &= -3x(t) + 5y(t) \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

8. Bestäm en ON-bas för det underrum till $\boldsymbol{R}^4$ som spänns upp av vektorerna $(1, 1, 1, 1)^T$, $(1, 0, 1, 0)^T$ och $(2, 2, 1, -1)^T$.

Lycka till!
Sven