MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen

Inga hjälpmedel
Datum: 2013-04-4 kl. 08.30–12.30
Telefonvakt: Anders Martinsson.
tel. 0703 088304

Linjär algebra, MMG200 del 2.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.
Uppgift 1 kan ge 4p. Övriga kan ge 3p. Ordlista finns på baksidan.

---

1. Nedan ges åtta påståenden. Avgör för vart och ett av dem om det är sant eller falskt. Du behöver ej ge motiveringar utan svarar bara sant eller falskt. Rätt svar ger 0,5 p, fel svar -0,5 p och inget svar ger 0 p. Dock inte mindre än 0 p på hela uppgiften.
   (a) Linjen $(x, y, z) = (1 + 2t, t, -1 - t)$ är vinkelrät mot planet $2x - y + 3z = 4$
   (b) Vektorn $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ är egenvektor till matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
   (c) Om matriserna A och B är kvadratiska, $\det A \neq 0$ så gäller att $AB = 0 \Rightarrow B = 0$ (nollmatrisen).
   (d) Om $\det A = 0$ så finns egenvektorer till A som ligger i nollrummet till A.
   (e) Om A är en $m \times n$ – matris och $n > m$ så har $\mathrm{Nul}(A)$ dimension > 0.
   (f) Om ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ endast har reella rötter så måste A vara diagonaliserbar.
   (g) Tre vektorer i $\boldsymbol{R}^4$ är alltid linjärt oberoende.
   (h) Om $\boldsymbol{x_1}, ..., \boldsymbol{x_p}$ är linjärt beroende vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ så är var och en av dem en linjärkombination av de övriga.

2. Bevisa den associativa lagen för matrismultiplikation, $A(BC) = (AB)C$. Det får anses känt att $A(B\boldsymbol{x}) = (AB)\boldsymbol{x}$ för en kolonnvektor $\boldsymbol{x}$.

3. Visa att om $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_p$ är vektorer i $\boldsymbol{R}^n$ där $p > n$ så är de linjärt beroende.

4. Bestäm ekvationen får det plan som innehåller linjen $x - 2 = \dfrac{y}{2} = \dfrac{2-z}{3}$ och punkten (1,-1,2).

5. För vilka x är vektorerna $(x, 1, 2)^T$,$(-2, 2, 4x)^T$ och $(1, x, 2)^T$ linjärt beroende?

6. Bestäm en ortogonal matris P och en diagonalmatris D så att $A = PDP^{-1}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Bestäm en bas för nollrummet och en ON-bas för kolonnrummet till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8. Låt $F(\boldsymbol{u})$ vara den rätvinkliga projektionen av $\boldsymbol{u}$ på planet $x + 2y - z = 0$ och låt $G(\boldsymbol{u})$ vara den rätvinkliga projektionen av $\boldsymbol{u}$ på planet $2x - y + z = 0$. Bestäm avbildningsmatrisen för $H(\boldsymbol{u}) = G(F(\boldsymbol{u}))$ i standardbasen.

Lycka till!
Sven