

MMG 200-2,
Linjär algebra
2012-12-21,
Lösningar

① b, c, d och g falska, resten sanna

② Sats 2.6 och 2.12

③ Sats 6.5

④ Tre vektorer i planet: $v_1 = (2, 2, 1) - (1, 2, -1) = (1, 0, 2)$
 $v_2 = (2, 2, 1) - (0, 1, 2) = (2, 1, -1)$

En normalvektor: $v_1 \times v_2 = (-2, 5, 1)$

Planets ekvation: $-2x + 5y + z = 1$. Sätt in en punkt, $(0, 1, 2)$: $1 = 0 + 5 + 2 = 7$ $-2x + 5y + z = 7$

⑤ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ visar att $b \notin \text{Col } A$.

$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ Lös systemet $A^T A x = A^T b$:

$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$Ax = b = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

⑥ $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1-a & 1-2a & -a \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$ $a \neq 2, a \neq -1 \Rightarrow$ 3 första kolonnerna är pivotkolonner

$a = -1$ ger $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ kolonn 1, 3, 4 är pivotkolonner

$a = 2$ ger $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ kolonn 1, 2 är pivotkolonner

$\dim(\text{Col } A) = \begin{cases} 3 & \text{om } a \neq 2 \\ 2 & \text{om } a = 2 \end{cases}$

Bas: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ om $a \neq 2, a \neq -1$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \right\}$ om $a = -1$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ om $a = 2$.

$\dim(\text{Nul } A) = \begin{cases} 1 & \text{om } a \neq 2 \\ 2 & \text{om } a = 2 \end{cases}$

⑦ $x' = Ax$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Eigenvärden: $0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$

$\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 3$: $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Allmän lös. $x = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ger

$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $c_1 = -1, c_2 = 1$

Svar $x = -e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ eller $\begin{cases} x = 2e^{3t} - e^{2t} \\ y = 3e^{3t} - e^{2t} \end{cases}$

⑧ $x_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$, $x_2 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, $x_3 = (2 \ 2 \ 1 \ -1)^T$

Sätt $v_1 = x_1$ och

$\frac{1}{2} v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$v_3 = x_3 - \frac{x_3 \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{x_3 \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

En ON-bas: $\left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$