Lösningar till
Linjär algebra
MMG 200:2
2013-04-04

(1) a) f) g) h) falskt ; b) c) d) e) sant

(2) Sats 8.2 a

(3) Sats 6.5

---

(4) $\mathbf{v} = (1, 2, -3)$ är en riktningvektor till linjen och därmed en vektor i planet. En punkt i planet är $(2, 0, 2)$, och $\mathbf{u} = (2, 0, 2) - (1, -1, 2) = (1, 1, 0)$ är därför en annan vektor i planet. En normalvektor: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (3, -3, -1)$ och planets ekvation: $3(x-2) - 3(y-0) - 1(z-2) = 0$, eller $\underline{3x - 3y - z = 4}$

---

(5) Kolonnerna i en kvadratisk matris är linjärt beroende $\Leftrightarrow$ determinanten för matrisen $= 0$.

$$0 = \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 1 & 2 & x \\ 2 & 4x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2-2x & 1-x^2 \\ 1 & 2 & x \\ 0 & 4x-4 & 2-2x \end{vmatrix} = 2(1-x)\begin{vmatrix} -1-x & 1+x \\ 2x-2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(1-x)(1+x)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = -4(1-x)(1+x)x$$

Linjärt beroende om $\underline{\underline{x=0,\ x=1 \text{ eller } x=-1}}$

---

(6) Bestäm egenvärden: $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Egenvektorer:

$\underline{\lambda = 2}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, lösning $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = 1}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, lösning $t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, Lösning $t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Då är $A = PDP^{-1}$ med $\underline{\underline{D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}}$ och $\underline{\underline{P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}}}$

---

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. x_2, x_4, x_5 fria

$x_5 = t,\ x_4 = s,\ x_3 = -s-t,\ x_2 = r,\ x_1 = -2r+s$, dvs

$\mathbf{x} = t\underline{\underline{(0, 0, -1, 0, 1)^T}} + s\underline{\underline{(1, 0, -1, 1, 0)^T}} + r\underline{\underline{(-2, 1, 0, 0, 0)}}$

Vilket ger en bas för nollrummet.

En bas för kolonnrummet: $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

Gramm-schmidt: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{7}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix}$

En ON-bas: $\underline{\underline{\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{174}}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -11 \end{bmatrix}\right\}}}$

---

(8) Planens normalvektorer är $\mathbf{n}_1 = (1, 2, -1)^T$ och $\mathbf{n}_2 = (2, -1, 1)^T$

Projektionsformeln ger att

$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}_1|^2}\mathbf{n}_1$ och $G(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_2|^2}\mathbf{n}_2$.

Om A och B är matriserna för F resp. G så får deras kolonner som basvektorernas bilder

$F(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 0)^T - \frac{1}{6}(1, 2, -1)^T = \frac{1}{6}(5, -2, 1)^T$

$F(\mathbf{e}_2) = (0, 1, 0)^T - \frac{2}{6}(1, 2, -1)^T = \frac{1}{6}(-2, 2, 2)^T$

$F(\mathbf{e}_3) = (0, 0, 1)^T + \frac{1}{6}(1, 2, -1)^T = \frac{1}{6}(1, 2, 5)^T$

$G(\mathbf{e}_1) = (1, 0, 0)^T - \frac{2}{6}(2, -1, 1) = \frac{1}{6}(2, 2, -2)^T$

$G(\mathbf{e}_2) = (0, 1, 0)^T + \frac{1}{6}(2, -1, 1) = \frac{1}{6}(2, 5, 1)^T$

$G(\mathbf{e}_3) = (0, 0, 1)^T - \frac{1}{6}(2, -1, 1) = \frac{1}{6}(-2, 1, 5)^T$.

Matrisen för $G \circ F$ blir då

$$BA = \frac{1}{36}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{36}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 1 & 8 & 17 \\ -7 & 16 & 25 \end{bmatrix}}}$$