Lösningar till
MMG 200 : 2
13 08 21

① Sant: b, g, h   falskt: a, c, d, e, f

② a) sats 2.5   b) sats 2.6   c) sats 2.12

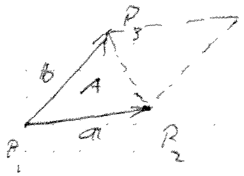
③ sats 6.5

---

④ a) $a = \overrightarrow{P_1P_2} = (-1,2,0)-(1,1,1) = (-2,1,-1)$

$b = \overrightarrow{P_1P_3} = (2,-1,-1)-(1,1,1) = (1,-2,-2)$

$A = \frac{1}{2}|a \times b| = \frac{1}{2}|(-4,-5,3)| = \underline{\underline{5/\sqrt{2}}}$



b) $T = \frac{1}{3}(\overline{OP_1} + \overline{OP_2} + \overline{OP_3}) = \frac{1}{3}((1,1,1)+(-1,2,0)+(2,-1,-1)) =$

$= \frac{1}{3}(2,2,0) = \underline{\underline{(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, 0)}}$

---

⑤ Matrisens $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Bas för kolonnrum utgörs av pivotkolonner $\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}$

Nollrum $A\mathbf{x} = 0$ ger $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = t \\ x_4 = s \end{cases}$

ger $x_3 = s$, $x_1 = 2t - s$, dvs

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2t-s \\ t \\ s \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Bas för Nollrummet:

$\underline{\underline{\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}}$

---

⑥ $\det \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ a & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & a \\ a & 4a+8 & 4 \end{vmatrix} = -(12 - a(4a+8)) =$

$= 4(a^2 + 2a - 3) = 4(a+3)(a-1) \neq 0$ om $a \neq 1$ och -3.

$\underline{a=1}$ ger $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

<u>Lösning saknas</u>

$\underline{a=-3}$ ger $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>Oändligt många lösningar</u>

<u>$a \neq 1$ och -3</u> ger <u>entydig lösning</u>

---

⑦ $0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 3 & -\lambda & -3 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= -\lambda^2(\lambda+2)$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\lambda_1 = -2$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_1 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_{2,3} = 0$ ger $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i dvs

$x_1 - x_3 = 0$, $x_2 = t$, fri och $x_3 = s$ fri, $x_1 = s$ och

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{v}_2 = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$, $\underline{D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

---

⑧ $A\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} =$

$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}}$