

Lösningar till MMG 100-2, 131220

① $a \ b \ c \ d \ e \ f \ g \ h$
 $s \ f \ s \ s \ s \ f \ f \ f$

② Sats 2 kap 6: Lag.

③ Sats 10 kap 1: Lag

④ b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
 Linjen: $(x, y, z) = (1-t, -1, t) = (1, -1, 0) + t(-1, 0, 1)$
 a) normalvektor till sökta planet =
 = riktningsvektor för skärningslinjen:
 $m = (-1, 0, 1)$ och vi får planets ekvation:
 $-1(x-1) + 0(y-0) + 1(z-0) = 0, \underline{x-z=1}$

⑤ $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
 kolonn 1 och 3 är pivotkolonner och
 bas för Col A är $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Lös $Ax=0$:
 $x_1 = 2r - 5 + t$
 $x_2 = r$
 $x_3 = -3 - t$
 $x_4 = 5$
 $x_5 = t$
 $x = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
 Bas för $Nu A$ är $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

⑥ Satts punkterna in i ekvationen får vi

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 1 \\ 2a + b = 1 \\ 3a + b = 2 \end{cases}, \text{ eller } A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = b \text{ med } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Systemet $A^T A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^T b$ får då totalmatrisen
 $\begin{bmatrix} 15 & 5 & 8 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, som ger
 Lösningen $a=b=\frac{2}{5}$ och linjen $y=\frac{2}{5}x+\frac{2}{5}$

⑦ Kan skrivas $x_{n+1} = Ax_n$ där $x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
 och $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Egenvärden fås ur
 $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$
 $\lambda_1 = -2$ ger $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 3$ ger $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
 S. $v_1 + 2v_2 = x_0$ ger $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
 dvs $x_0 = v_1 + 2v_2$ och $x_n = A^n x_0 = A^n v_1 + 2A^n v_2 =$
 $= \lambda_1^n v_1 + 2\lambda_2^n v_2 = (-2)^n \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \cdot 3^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och
 $\underline{x_n = 2(-2)^n + 2 \cdot 3^n, y_n = -(-2)^n + 4 \cdot 3^n}$

⑧ Ortogonalisera $x_1 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)^T, x_2 = (1 \ 1 \ 0 \ 1)^T$
 $v_1 = x_1, v_2 = x_2 - \frac{x_2 \cdot v_1}{|v_1|^2} v_1 = (1 \ 1 \ 0 \ 1)^T - \frac{1}{2}(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T =$
 $= \frac{1}{2}(1 \ 2 \ -1 \ 2)^T$ såhär $v_2 = (1 \ 2 \ -1 \ 2)$
 Projicera: $F(e_1) = \frac{e_1 \cdot v_1}{|v_1|^2} v_1 + \frac{e_1 \cdot v_2}{|v_2|^2} v_2 =$
 $= \frac{1}{2}(1 \ 0 \ 1 \ 0)^T + \frac{1}{10}(1 \ 2 \ -1 \ 2)^T = \frac{1}{5}(3 \ 1 \ 2 \ 1)^T$
 P. s. s. $F(e_2) = \frac{1}{5}(1 \ 2 \ -1 \ 2)^T$,
 $F(e_3) = \frac{1}{5}(2 \ -1 \ 3 \ -1)^T$
 $F(e_4) = \frac{1}{5}(1 \ 2 \ -1 \ 2)^T$
 $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$