

Lösningar till MMG 200-2, 14 04 26

① sant: b, d, f
falskt: a, c, e, g, h

② Sats 5 kap 5

③ Sats 5 Kap 6

④ Två vektorer i planet:

a) $a = (2, 2, 1) - (1, 1, 1) = (1, 1, 0)$ och
 $b = (2, 1, 1) - (1, 1, 1) = (1, 0, 0)$

$a \times b = (1, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, 1) = \text{normalvektor}$

$0(x-1) + 0(y-1) + 1(z-1) = 0$ dvs planet: $z=1$

b) Linjen har riktningsvektor $(0, 0, 1)$ och
går genom $(1, 2, 3)$: $(x, y, z) = (1, 2, 3+t)$

⑤ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ger $A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ och $A^T b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vi löser systemet $A^T A x = A^T b$:

③ $\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x = 3/7 \\ y = -1/7 \\ z = -1/7 \end{cases}$

⑥ Eigenvärden: $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 7 & -3-\lambda & 5 \\ 5 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (1-\lambda)((-3-\lambda)(3-\lambda)+5) - (-1)(7(3-\lambda)-25) +$
 $+ 1(-7-5(-3-\lambda)) = (1-\lambda)(\lambda^2-4) - 7\lambda - 4 + 5\lambda + 8 =$
 $= -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)$

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$

Egenvektorer:

$\lambda = 0 \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_1 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2 \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 5 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda = -1 \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 5 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

⑦ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a & -1 \\ 3 & a & 7 & -1 \\ a & 7 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 4 & 2 \\ 0 & 7-2a & 6-a & -3-a \end{bmatrix} \sim \dots$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & (a-4)^2 & a-4 \\ 0 & 0 & (2-2a)(a-4) & 4-a \end{bmatrix} \sim [a \neq 4] \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$

$a = 4: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a = -2: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\dim \text{Nu}(A) = \begin{cases} 0, a \neq -2, 4 \\ 1, a = -2 \\ 2, a = 4 \end{cases} \quad \dim \text{CoLA} = \begin{cases} 4, a \neq -2, 4 \\ 3, a = -2 \\ 2, a = 4 \end{cases}$

⑧ $a = (1, 1, 1, 0, 1)^T, b = (1, 0, 1, 0, 0)^T, c = (0, 1, 0, 1, 1)^T$
sätt $u = a, v = b - \frac{u \cdot b}{u \cdot u} u = b - \frac{1}{2} u = \frac{1}{2}(2b - u) = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 0, -1)^T$
Sätt $w = c - \frac{u \cdot c}{u \cdot u} u - \frac{v \cdot c}{v \cdot v} v = c - \frac{1}{2} u + v =$

$= \frac{1}{2}(2c - u + 2v) = \frac{1}{2}(0, 0, 0, 2, 0)$

ON-bas: $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ där

$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 1, 0, 1)^T$

$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 1, 0, -1)^T$

$\hat{w} = (0, 0, 0, 1, 0)$