

Lösningar till
Linjär algebra, MMG 200:2
2014-08-20

- ① (a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h)
s s f s f f f f

② Sats 2.6 och 2.12

③ Sats 6.5

④ Linjärt beroende $\Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 2 & x-2 \\ 2 & 4 & x \end{vmatrix} =$
 $= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2+2x & 4+x & 2 \\ 2+x^2 & 4+2x & x \end{vmatrix} =$
 $= (4+x)(2+x^2) - (2+2x)(4+2x) = x^3 - 10x = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 0, \pm \sqrt{10}$

⑤ Kantvektorer: $v_1 = \overline{P_1 P_2} = (-2, 1, 1) - (1, -1, 0) = (-3, 2, 1)$
 $v_2 = \overline{P_1 P_3} = (2, -3, 3) - (1, -1, 0) = (1, -2, 3)$
 $v_3 = \overline{P_1 P_4} = (2, -1, 2) - (1, -1, 0) = (1, 0, 2)$

a) Volymen $= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{8}{3}$

b) Mittpunkten $= \frac{1}{2} (\overline{OP_2} + \overline{OP_3}) = \frac{1}{2} (0, -2, 4) = (0, -1, 2)$
 Riktningvektor: $(0, -1, 2) - (1, -1, 0) = (-1, 0, 2)$

Linjen: $(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-1, 0, 2)$

⑥ $x_{n+1} = A x_n$ där $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$. Eigenvärden:
 $0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$

Eigenvektorer: $\lambda = -1 \quad \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 2 \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Allmän lösning: $x_n = c_1 (-1)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 (2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$n=0$ ger $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_1 = 2, c_2 = -1$ och

$x_n = 2(-1)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dvs $\begin{cases} x_n = 2(-1)^n - 2^n \\ y_n = 4(-1)^n - 2^n \end{cases}$

⑦ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 8 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

bas för $\text{Col}(A) = \{ (1, -1, 1, 3)^T, (2, 1, 5, 0)^T \}$

$Ax=0 \Leftrightarrow x = (t+s+2u, -5t-2s-u, 3t+3s+3u)^T =$
 $= t(1, -5, 3, 0)^T + s(1, -2, 0, 3)^T + u(2, -1, 0, 3)^T$

Bas för $\text{Nul}(A) = \{ (1, -5, 3, 0)^T, (1, -2, 0, 3)^T, (2, -1, 0, 3)^T \}$

⑧ a) $(v v^T) v = v (v^T v) = v$, dvs v egenvektor med $\lambda = 1$.

b) $A^T = (v v^T)^T = (v^T)^T v^T = v v^T = A$, dvs symmetrisk
 $A^2 = v v^T v v^T = v v^T = A$

c) Visa att $(Ax - x) \perp v = v^T (Ax - x) =$

$= v^T v v^T x - v^T x = 0$. Klart.

Obs: $Ax - x = v v^T x - x = c v - x$
 skalar $= c$

