MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2014-10-25.

1. (a) Se boken sidorna 215-216 (för grupp) och 218 (för abelsk).
   (b) Man kan t ex ta $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ och $\langle \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}, \cdot \rangle$.

2. Se boken sidorna 136-137.

3. Se boken sidan 75.

4. Vi sätter
$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k(3k+1) \text{ och } g(n) = n(n+1)^2,$$
och ska alltså visa att $f(n) = g(n)$ för alla positiva heltal n. Vi gör ett induktionsbevis över n.

   Basfall: För $n = 1$ får vi
$$f(1) = \sum_{k=1}^{1} k(3k+1) = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 4 \text{ och } g(1) = 1(1+1)^2 = 4.$$
Alltså stämmer det då $n = 1$.

   Induktionssteg: Antag att $f(n) = g(n)$ för något $n \geq 1$. Visa att i så fall är också $f(n+1) = g(n+1)$. Vi får
$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + (n+1)(3(n+1)+1) = g(n) + (n+1)(3(n+1)+1) \\ &= n(n+1)^2 + (n+1)(3n+4) = (n+1)(n(n+1) + (3n+4)) \\ &= (n+1)(n^2+4n+4) = (n+1)(n+2)^2 = g(n+1), \end{aligned}$$
där vi i första steget utnyttjade definitionen av f och i det andra induktionsantagandet.

   Enligt induktionspricipen gäller därmed att $f(n) = g(n)$ för alla positiva heltal n.

5. (a) Vi visar att R är reflexiv, symmetrisk och transitiv och därmed en ekvivalensrelation.
   Reflexiv: $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, så xRx för alla $x \in \mathbb{R}$.
   Symmetrisk: Eftersom $y - x = -(x - y)$ så gäller att $xRy \iff yRx$, ty $n \in \mathbb{Z} \iff -n \in \mathbb{Z}$.
   Transitiv: Antag att xRy och yRz, så att $x - y \in \mathbb{Z}$ och $y - z \in \mathbb{Z}$. Då gäller att $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$ eftersom summan av två heltal förstås är ett heltal. Alltså gäller att xRz.
   (b) Vi har att
$$[1] = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z},$$
eftersom alla reella tal som skiljer sig ett heltal från 1 är precis alla heltal.

(c) Vi kan t ex ta
$$[0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x < 1\}.$$
Inga två olika tal i $[0,1)$ är relaterade med varandra, eftersom differensen alltid ligger i öppna intervallet mellan -1 och 1 och därmed aldrig blir ett heltal. Dessutom givet ett reellt tal x så är x minus det största heltal som är mindre än eller lika med x ett tal i $[0,1)$ så varje reellt tal är relaterat med exakt ett tal i $[0,1)$ som därmed innehåller exakt en representant för varje ekvivalensklass.

6. (a) Detta är antalet permutationer av 11 element där 3 är identiska (3 stycken A) och det blir alltså '
$$11!/3! = 6652800.$$
(Man behöver inte räkna ut fakulteten.)

(b) Vi delar in i tre olika grupper. De som innehåller tre olika bokstäver, de som innehåller två stycken A och de(n) som innehåller tre stycken A.

För tre olika bokstäver blir det en permutation av 3 element bland 9 (olika) så $9 \cdot 8 \cdot 7$. De med två A kan kompleteras med 8 andra bokstäver som kan placeras på 3 olika ställen så det blir $8 \cdot 3$ sådana ord. Totalt får vi alltså
$$9 \cdot 8 \cdot 7 + 8 \cdot 3 + 1 = 72 \cdot 7 + 25 = 504 + 25 = 529.$$

7. Vi gör ett induktionsbevis över n.

Basfall: För $n = 1$ får vi
$$\mathrm{sgd}(L(1), L(1+1)) = \mathrm{sgd}(L(1), L(2)) = \mathrm{sgd}(a,b) = 1$$
enligt definitionen av L samt förutsättningen att $\mathrm{sgd}(a,b) = 1$.

Induktionssteg: Antag att $\mathrm{sgd}(L(n), L(n+1)) = 1$ för något $n \ge 1$. Vi ska visa att i så fall är $\mathrm{sgd}(L(n+1), L(n+2)) = 1$.

Enligt definitionen av L gäller att $L(n+2) = L(n+1) + L(n)$ eftersom $n + 2 > 2$, så
$$L(n) = L(n+2) - L(n+1).$$
Om $d \mid L(n+1)$ och $d \mid L(n+2)$, så kommer även $d \mid L(n+2) - L(n+1)$ enligt känd sats. Det betyder att en gemensam delare till $L(n+1)$ och $L(n+2)$ också kommer att vara en gemensam delare till $L(n+1)$ och $L(n)$. Därmed ser vi att $\mathrm{sgd}(L(n), L(n+1)) = 1$ implicerar att $\mathrm{sgd}(L(n+1), L(n+2)) = 1$ och induktionssteget är klart.

Enligt induktionspricipen gäller därmed att $\mathrm{sgd}(L(n), L(n+1)) = 1$ för alla positiva heltal n.

Om man är uppmärksam så ser man att i själva verket så får vi
$$\mathrm{sgd}(L(n), L(n+1)) = \mathrm{sgd}(L(n+1), L(n+2))$$
i induktionssteget och därmed kan man visa det mer generella påståendet att $\mathrm{sgd}(L(n), L(n+1)) = \mathrm{sgd}(a,b)$ för alla positiva heltal n även då $\mathrm{sgd}(a,b) > 1$.

8. Om vi beteckningar a:s entalssiffra med a_0 så är $b = (a - a_0)/10 - 2a_0$. Det ger att

$$2a + b = \frac{20a}{10} + \frac{a - a_0}{10} - \frac{20a_0}{10} = \frac{21a - 21a_0}{10} = 21\frac{a - a_0}{10} = 21(b + 2a_0).$$

Vi ser därmed att $2a + b$ är delbart med 21 och speciellt då delbart med 7. Vi har alltså att $2a + b = 7k$. Om $7 \mid a$ så kommer 7 dela $b = 7k + 2a$. Omvänt om $7 \mid b$ så kommer 7 dela $2a = 7k - b$ men då gäller att $7 \mid a$ eftersom $\mathrm{sgd}(2, 7) = 1$. Därmed är beviset klart.

Observera att resultatet ger en rekursiv algoritm att kontroller om ett tal är delbart med 7. Man upprepar proceduren att skapa b från a tills man har ett tal som man lätt kan avgöra om det är delbart med 7. Analog regel går att konstruera för godtyckligt primtal.