MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2014-10-25.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Timo Hirscher, 0703-088304.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. (a) Skriv ned de fyra axiom som ska gälla för att en mängd G med en binär operator $\star$ ska vara en abelsk grupp.

   (b) Ge två olika exempel på grupper $\langle G, \star \rangle$ sådana att G innehåller 4 element. (3p)

2. Formulera och bevisa aritmetikens fundamentalsats. (4p)

3. Definiera begreppen *reflexiv*, *symmetrisk* och *transitiv* relation. (2p)

4. Visa att
$$\sum_{k=1}^{n} k(3k+1) = n(n+1)^2$$
för alla positiva heltal n. (3p)

5. Låt R vara relationen på $\mathbb{R}$ som är definerad av att två reella tal är relaterade om och endast om deras differens är ett heltal, d v s
$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Z}\}.$$

   (a) Visa att R är en ekvivalensrelation.

   (b) Vad är $[1]$, d v s vad är ekvivalensklassen av 1 (med avseende på R)?

   (c) Ge en delmängd till $\mathbb{R}$ som är sådan att den innehåller exakt en representant för varje ekvivalensklass med avseende på R. (4p)

6. I den här uppgiften behöver man inte räkna fram värdet i första deluppgiften utan det räcker med ett uttryck som svar. I andra deluppgiften ska man däremot räkna fram värdet.

   (a) Hur många olika "ord" med 11 bokstäver kan man bilda med bokstäverna i ALGEBRAISKA?

   (b) Hur många olika "ord" med 3 bokstäver kan man bilda med bokstäverna i ALGEBRAISKA? (3p)

Var god vänd!

7. Vi definierar Lucas-talen med startvärden a och b att vara talföljden $L(n)$ som definieras rekursivt genom

$$\begin{cases} L(1) = a, \\ L(2) = b, \\ L(n) = L(n-1) + L(n-2), \ n > 2. \end{cases}$$

Visa att om $\text{sgd}(a, b) = 1$, så är $\text{sgd}(L(n), L(n+1)) = 1$ för alla positiva heltal n. (3p)

8. Låt a vara ett positivt heltal och bilda ett nytt positivt heltal b genom att ta bort entalssiffran från a och sedan subtrahera 2 gånger entalssiffran i a. T ex om $a = 34786$ så blir $b = 3478 - 2 \cdot 6 = 3466$. Visa att $7 \mid a$ om och endast om $7 \mid b$.

   Tips: Visa att $2a + b \equiv 0 \pmod 7$. Utnyttja sedan detta för att visa påståendet. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade senast den 11 november. Ditt resultat meddelas via (GU-)mail från Ladok. Skrivningar lämnas ut alla vardagar kl 11.00-13.00 på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.