Riemannintegralen, definition och några resultat

Med hjälp av supremumbegreppet kan vi göra en mer naturlig definition av integrerbarhet och integralen av en integrerbar funktion.

Med beteckningarna i Persson-Böiers, sid. 286ff. sätter vi

$$\overline{I}(f) = \inf\{I(\Psi); \Psi \text{ en trappfunktion med } \Psi \geq f\}$$

och

$$\underline{I}(f) = \sup\{I(\Phi); \Phi \text{ en trappfunktion med } \Phi \leq f\} \; .$$

$\overline{I}(f)$ och $\underline{I}(f)$ kallas för över- respektive underintegralen till f. Vi har alltid $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$, se Övning 2. När olikheten är en likhet är f integrerbar enligt följande definition.

Definition 1. *En begränsad funktion på ett begränsat intervall $[a, b]$ är* ***(Riemann)integrerbar*** *om $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Om f är integrerbar betecknas* ***integralen*** *av f över $[a, b]$*

$$\int_a^b f(x)dx$$

och är lika med detta gemensamma värde,

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{I}(f) = \underline{I}(f) \; .$$

Sats 2. *Funktionen f är integrerbar om och endast om det för varje $\epsilon > 0$ finns trappfunktioner Φ och Ψ med*

$$\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x) \text{ och } I(\Psi) - I(\Phi) < \epsilon \; .$$

Bevis. Om f inte är integrerbar så är $\epsilon = \overline{I}(f) - \underline{I}(f) > 0$. Så om Φ och Ψ är trappfunktioner med $\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ gäller $I(\Psi) \geq \overline{I}(f)$ och $I(\Phi) \leq \underline{I}(f)$. Detta ger

$$I(\Psi) - I(\Phi) \geq \overline{I}(f) - \underline{I}(f) = \epsilon \; .$$

Omvänt antar vi att f är integrerbar och att $\epsilon > 0$. Eftersom $\overline{I}(f) = \inf\{I(\Psi); \Psi \text{ en trappfunktion med } \Psi \geq f\}$ finns en trappfunktion $\Psi \geq f$ med $I(\Psi) < \overline{I}(f) + \frac{\epsilon}{2}$. På liknande sätt finns en trappfunktion $\Phi(x) \leq f$ med $I(\Phi) > \underline{I}(f) - \frac{\epsilon}{2}$. Så

$$I(\Psi) - I(\Phi) < \overline{I}(f) + \frac{\epsilon}{2} - \left(\underline{I}(f) - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$$

eftersom $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. □

Sats 3. *Om f är monoton och begränsad på $[a, b]$ så är f integrerbar.*

Bevis. Vi bevisar satsen då f är växande. Beviset då f är avtagande är snarlikt. Ett alternativt sätt är att observera att om f är avtagande så är $-f$ växande, och alltså integrerbar, och sen använda Övning 2 med $\alpha = -1$.

Låt $\epsilon > 0$ och $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ där $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Låt $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $m_i = f(x_{i-1})$, $M_i = f(x_i)$ och $|I_i| = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ vara längden av I_i. Observera att eftersom f är växande så gäller $m_i \leq f(x) \leq M_i$ då $x \in I_i$.

Definiera Ψ och Φ genom att $\Psi(x) = M_i$ och $\Phi(x) = m_i$ då $x \in I_i$. Då är Φ och Ψ trappfunktioner och $\Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$. Dessutom gäller

$$\begin{aligned} I(\Psi) - I(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)|I_i| = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) \\ &= \frac{b-a}{n}\Big(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \\ &\qquad + \ldots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(x_n) - f(x_{n-1})\Big) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \epsilon \end{aligned}$$

om n är tillräckligt stort. Så f är integrerbar enligt Sats 2. □

Det är lätt att se att om intervallet $[a, b]$ kan delas upp i ändligt många intervall där f är monoton så är f integrerbar. Detaljerna överlämnas till den intresserade läsaren.

Exempel 4. *Funktionen f definierad av*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & om\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & om\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

är inte *integrerbar på $[0, 1]$.*

Uppenbarligen gäller (Eller hur?) $\overline{I}(f) = I(\Phi)$ där $\Phi(x) = 1$ för alla x, och $\underline{I}(f) = I(\Psi)$ där $\Psi(x) = 0$ för alla x. Så $\overline{I}(f) = 1 \neq 0 = \underline{I}(f)$.

I Persson-Böiers bevisas att om f är kontinuerlig, eller något allmännare om f är kontinuerlig utom i ändligt många punkter, så är f integrerbar.

I själva verket gäller följande karakterisering av integrerbara funktioner.

Sats 5. *En begränsad funktion på $[a, b]$ är integrerbar om och endast om $\{x \in [a, b]; f \text{ inte är kontinuerlig i } x\}$ är en nollmängd.*

Definition 6. *En mängd $N \subset \mathbb{R}$ är en nollmängd om det till varje $\epsilon > 0$ finns uppräkneligt (eller ändligt) många intervall I_i så att $N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ och $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \epsilon$.*

Beviset av Sats 5 ligger (långt) utanför vår kurs men för att få en känsla för begreppet nollmängd ger vi följande

Exempel 7. *Om U är en uppräknelig mängd så är U en nollmängd.*

Låt $x_1, x_2, \dots$ vara en uppräkning av U och $\epsilon > 0$. Låt I_i var intervallet med mittpunkt x_i och längd $|I_i| = \dfrac{\epsilon}{2^n}$. Då gäller $U = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{x_i\} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ och $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \epsilon$ så U är en nollmängd.

Satsen om räknereglerna för integraler, Sats 5, sid. 302 i Persson-Böiers bevisas inte — ”Vi avstår från att ge detaljerade bevis av dessa regler”. Med vår definition av Riemannintegralen är det inte svårt att att bevisa Sats 5.

Vi nöjer oss med att bevisa (10) (som är svårast) och börjar med följande

Lemma 8. *Antag att f och g är begränsade funktioner på intervallet $[a, b]$. Då gäller*

$$\text{(a)}\quad \overline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$$

och

$$\text{(b)}\quad \underline{I}(f+g) \geq \underline{I}(f) + \underline{I}(g)\ .$$

Bevis. Vi bevisar (a), beviset av (b) är likadant.

Låt $\epsilon > 0$ och tag trappfunktioner Φ och Ψ med $\Phi \geq f$, $\Psi \geq g$, $I(\Phi) < \overline{I}(f) + \epsilon$ och $I(\Psi) < \overline{I}(g) + \epsilon$. Då är $\Phi + \Psi$ en trappfunktion med $\Phi + \Psi \geq f + g$. Så

$$\overline{I}(f+g) \leq I(\Phi + \Psi) = I(\Phi) + I(\Psi) < \overline{I}(f) + \overline{I}(g) + 2\epsilon\ .$$

Detta gäller för alla $\epsilon > 0$ och alltså $\overline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$.

□

Vi kan nu enkelt bevisa (10).

Sats 9. *Antag att f och g är integrerbara funktioner på intervallet $[a, b]$. Då är $f + g$ också integrerbar och*

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ .$$

Bevis. Lemmat ger

$$\begin{aligned} \overline{I}(f+g) &\leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g) = (f \text{ och } g \text{ integrerbara}) \\ &= \underline{I}(f) + \underline{I}(g) \leq \underline{I}(f+g) \leq \overline{I}(f+g) \ . \end{aligned}$$

Så alla olikheterna är likheter. Speciellt gäller $\underline{I}(f+g) = \overline{I}(f+g)$, och alltså är $f + g$ integrerbar. Dessutom är

$$\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \overline{I}(f+g) = \overline{I}(f) + \overline{I}(g) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ .$$

$\square$

Att bevisa att αf är integrerbar lämnas som Övning 2.

I boken formuleras och bevisas triangelolikheten (Sats 7) bara då f är styckvis kontinuerlig men det räcker att anta att f är integrerbar.

Sats 10. *Antag att f är integrerbar på intervallet $[a, b]$. Då är $|f|$ också integrerbar och*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ .$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$. Eftersom f är integrerbar finns en partition och trappstegsfunktioner Ψ och Φ med avseende på denna partition, så att $\Phi \leq f \leq \Psi$ och $I(\Psi) - I(\Phi) < \epsilon$. Låt m_i och M_i vara värdena av Φ och Ψ på I_i. Vi skall definiera två trappfunktioner $\tilde{\Psi}$ och $\tilde{\Phi}$ så att $\tilde{\Phi} \leq |f| \leq \tilde{\Psi}$ och $I(\tilde{\Psi}) - I(\tilde{\Phi}) < \epsilon$. $\tilde{\Psi}$ och $\tilde{\Phi}$ är definierade på samma partition som Ψ och Φ. Så det gäller att definiera deras värden $\tilde{m}_i$ respektive $\tilde{M}_i$. Vi har tre fall:

I. Om $m_i \geq 0$ låter vi $\tilde{m}_i = m_i$ och $\tilde{M}_i = M_i$.

II. Om $m_i < 0$ och $M_i \geq 0$ låter vi $\tilde{m}_i = 0$ och $\tilde{M}_i = \max(M_i, -m_i)$.

III. Om $M_i < 0$ låter vi $\tilde{m}_i = -M_i$ och $\tilde{M}_i = -m_i$.

Observera att $\tilde{M}_i - \tilde{m}_i \leq M_i - m_i$ och att på I_i gäller $\tilde{m}_i \leq |f| \leq \tilde{M}_i$. Så

$$I(\tilde{\Psi}) - I(\tilde{\Phi}) = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{M}_i - \tilde{m}_i)|I_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)|I_i| = I(\Psi) - I(\Phi) < \epsilon \, .$$

Alltså är $|f|$ integrerbar.

Beviset av olikheten är nu likadant som i Persson-Böiers. □

Anmärkning 11. *I Extra övningar, uppgift 1c) skisseras ett alternativt bevis för att $|f|$ är integrerbar.*

Generaliserade integraler

Sats 12. *En absolutkonvergent integral är konvergent.*

Bevis. Vi behandlar bara fallet $\int_a^\infty f(x)dx$ där $f(x)$ är integrerbar på alla intervall $[a, X]$. De andra fallen är snarlika.

Vi antar alltså att $\int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$, och skall visa att

$$\lim_{X\to\infty} \int_a^\infty f(x)dx \text{ existerar.}$$

Låt $f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$ och $f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$ (Rita figur!). Då gäller $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. Dessutom är $0 \leq f_+(x) \leq \frac{1}{2}(|f(x)| + |f(x)|) = |f(x)|$ och $0 \leq f_-(x) \leq \frac{1}{2}(|f(x)| + |f(x)|) = |f(x)|$. Så

$$\int_a^\infty f_+(x)dx \leq \int_a^\infty |f(x)|dx < \infty$$

och

$$\int_a^\infty f_-(x)dx \leq \int_a^\infty |f(x)|dx < \infty \, .$$

Eftersom $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ gäller

$$\lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)dx = \lim_{X\to\infty} \int_a^X f_+(x)dx - \lim_{X\to\infty} \int_a^X f_-(x)dx \, .$$

Eftersom båda gränsvärdena i högerledet existerar, existerar gränsvärdet $\lim_{X\to\infty} \int_a^X f(x)dx$ och integralen $\int_a^\infty f(x)dx$ är konvergent. □

Övning 1. Visa att vi alltid har $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$.

Övning 2. Visa att om f är integrerbar så är αf också integrerbar.

Övning 3. Visa att $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.

Övning 4. Visa att en monoton funktion kan ha högst uppräkneligt många diskontinuitetspunkter.

Övning 5. Visa att det finns en begränsad växande funktion på $[0, 1]$ som har ett uppräkneligt antal diskontinuiteter.

Övning 6. Vi bevisade att om f är en integrerbar funktion så är $|f|$ också integrerbar. Gäller omvändningen, dvs. om $|f|$ är integrerbar så är f är integrerbar?

Övning 7. Enligt Lemma 8 gäller $\overline{I}(f + g) \leq \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$. Finns det funktioner f och g så att $\overline{I}(f + g) < \overline{I}(f) + \overline{I}(g)$?