MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2015-10-26.

1. Se boken sidan 135.

2. Se boken sidan 219.

3. Se boken sidorna 75-76 för definitionerna. Exempel på en relation skulle t ex kunna vara att två reella tal är relaterade om och endast om det största heltalet som är mindre än talen är samma. Då får man en ekvivalensklass för varje heltal och ekvivalensklasserna blir de halvöppna intervallen

$$[n] = \{x \in \mathbb{R} : n \leq x < n+1\}$$

som då alla innehåller oändligt många reella tal.

4. (a) Vi ser att inget av de tre första primtalen $2, 3$ eller 5 är faktorer. Men $1001/7 = 143$ och $143 = 11 \cdot 13$ så

$$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

(b) Vi får alla positiva delare genom att ta alla möjliga produkter av primtalsfaktorerna och får

$$\{1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001\}.$$

(c) Man kan förstås ta till Euklides algoritm, men eftersom vi redan primtalsfaktoriserat 1001 och 7777 ser ganska fint ut att faktorisera så gör vi så istället. Vi ser att 7 uppenbarligen är en faktor och $1111 = 11 \cdot 101$ och eftersom 101 är ett primtal så får vi primtalsfakoriseringen

$$7777 = 7 \cdot 11 \cdot 101.$$

Därmed är $\text{sgd}(1001, 7777) = 7 \cdot 11 = 77$.

5. Vi gör ett induktionsbevis över n.

Basfall: För $n = 0$ får vi

$$\sum_{i=0}^{0} F_i^2 = F_0^2 = 0^2 = 0 \text{ och } F_0 F_{0+1} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Alltså stämmer det då $n = 0$.

Induktionssteg: Antag att

$$\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

för något $n \geq 0$. Visa att i så fall är också

$$\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1}F_{(n+1)+1} = F_{n+1}F_{n+2}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} F_i^2 &= \sum_{i=0}^{n} F_i^2 + F_{n+1}^2 \\ &= F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1}F_{n+2}.\end{aligned}$$

I andra steget utnyttjade vi induktionsantagandet och i det sista definitionen av F_{n+2} som summan av de två föregående.

Enligt induktionspricipen gäller därmed likheten för alla naturliga tal n.

6. (a) Det finns 9 möjligheter för tusentalet (ej 0), 10 möjligheter för hundratalet, 10 möjligheter för tiotalet och 5 möjligheter för entalet (de udda siffrorna). Enligt multiplikationsprincipen blir det $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$ udda positiva fyrsiffriga tal.

   (b) Sista siffran kan vara antingen 0 eller 5 och vi gör dessa två fall separat eftersom de kommer att skilja sig något åt då första siffran inte får vara 0.

   Vi börjar med fallet då sista siffran är 0. Då handlar valet av de tre övriga siffrorna om en permutation av 3 bland 9 så $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ möjliga tal.

   Nu till fallet då sista siffran är 5. Nu finns det bara 8 möjliga val för tusentalet (ej 0) och sedan finns 8 respektive 7 möjligheter för de två övriga siffrorna så $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ möjliga tal.

   Totalt blir det $504 + 448 = 952$ olika tal.

   (c) Vi börjar med de som är i växande ordning. Man ska alltså välja 4 olika siffror och när väl de är valda så finns det bara ett tal som uppfyller kravet att siffrorna är i växande ordning. Dessutom får man inte ta med 0 för den skulle tvingas vara först och då blir det ett tresiffrigt tal. Det handlar alltså om att välja ut 4 bland 9 så det blir

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126$$

   olika tal där siffrorna är i växande ordning.

   Fallet med avtagande ordning blir analogt, men här är det OK att ta med 0 för den hamnar alltid sist istället. Vi ska alltså välja 4 bland 10 så det blir

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

   olika tal där siffrorna är i avtagande ordning. Totalt blir det alltså $126 + 210 = 336$.

7. Binomialsatsen säger att

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

för reella tal x och y och positiva heltal n. Om vi sätter $x = 2$ och $y = 1$ så får vi

$$3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

vilket var precis det vi skulle bevisa.

Man kan (med lite mer möda) också göra ett induktionsbevis där man utnyttjar additionsformeln för binomialkoefficienterna. (Detta bevis blir helt enkelt i princip samma som för den allmänna binomialsatsen.)

8. Vi får att

$$\begin{aligned} abcabc &= a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \\ &= a(10^5 + 10^2) + b(10^4 + 10) + c(10^3 + 1) \\ &= 100a(10^3 + 1) + 10b(10^3 + 1) + c(10^3 + 1) \\ &= (10^3 + 1)(100a + 10b + c) = 1001(100a + 10b + c). \end{aligned}$$

Om vi gjorde rätt i uppgift 4a så noterade vi att $7, 11$ och 13 alla delade 1001 som är precis produkten av dessa tre primtal. Vi får alltså nu att alla dessa tre primtal delar $abcabc$. (Valet av 1001 i uppgift 4 var helt enkelt en liten subtil ledtråd till denna uppgiften. Inte så stor kanske, men alltid något.)