MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2016-10-24.

1. (a) Se boken sidan 61.

   (b) Man kan t ex ta
   Injektiv, ej surjektiv: $f(n) = n + 1$.
   Surjektiv, ej injektiv: $f(0) = 0$, $f(n) = n - 1$ om $n > 0$.
   Bijektiv: $f(n) = n$.

2. Se boken sidorna 136-137.

3. Se boken sidorna 215-216 samt 218.

4. (a) Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 1173 &= 3 \cdot 363 + 84 \\ 363 &= 4 \cdot 84 + 27 \\ 84 &= 3 \cdot 27 + 3 \\ 27 &= 9 \cdot 3. \end{aligned}$$

   Från detta drar vi slutsatsen att $\operatorname{sgd}(1173, 363) = 3$.

   (b) Vi använder Euklides utökade algoritm och får successivt genom att använda liketerna ovan att

$$\begin{aligned} 3 &= 84 - 3 \cdot 27 = 84 - 3(363 - 4 \cdot 84) = 13 \cdot 84 - 3 \cdot 363 \\ &= 13(1173 - 3 \cdot 363) - 3 \cdot 363 = 13 \cdot 1173 - 42 \cdot 363. \end{aligned}$$

   Vi får att $x = 3 \cdot 13 = 39$ och $y = 3 \cdot -42 = -126$ är en lösning. Samtliga lösningar ges av

$$x = 39 + \frac{363}{3}n = 39 + 121n \text{ och } y = -126 - \frac{1173}{3}n = -126 - 391n,$$

   där $n \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Vi får två fall: 2 killar och 3 tjejer, repspektive 3 killar och 2 tjejer. Det handlar om val utan hänsyn till ordning, alltså kombinationer, och vi får totalt

$$\begin{aligned} \binom{14}{2}\binom{12}{3} + \binom{14}{3}\binom{12}{2} &= \frac{14 \cdot 13}{2}\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3} + \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{2 \cdot 3}\frac{12 \cdot 11}{2} \\ &= (7 \cdot 13) \cdot (2 \cdot 11 \cdot 10) + (14 \cdot 13 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 11) \\ &= 7 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11(10 + 6 \cdot 2) = 143 \cdot 14 \cdot 22 \\ &= 143 \cdot 308 = 44044 \end{aligned}$$

   olika lag.

(b) Antalet permutationer av k element bland n ges av

$$n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

så det handlar om att se hur man kan faktorisera 210 i tal som följer direkt efter varandra. Primtalsfaktoriseringen är

$$210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$$

så speciellt måste en av faktorerna ha 7 som primtalsfaktor. Minsta möjliga är 7. Vi kan inte få ihop till 8, men däremot är $6 = 2\cdot 3$ och kvar är då 5. Alltså är $7\cdot 6\cdot 5 = 210$ vilket ger lösningen $n = 7$, $k = 3$. Nästa möjlighet för tal med faktorn 7 är $14 = 7\cdot 2$. Kvar blir $3\cdot 5 = 15$. Alltså är $15\cdot 14 = 210$ vilket ger lösningen $n = 15$, $k = 2$. Vi får också den triviala möjligheten $n = 210$ och $k = 1$.

Detta är alla möjligheter, ty vi kan inte få $k \geq 4$ eftersom det bara är 4 primtalsfaktorer så varje tal skulle behöva bestå av ett primtal (eller möjligen 1, men det är omöjligt) och dessa är förstås inte direkt efter varandra. Dessutom kan man inte ha två med samma k, eftersom antalet är strängt växande i n med fixt k.

Alla möjliheter är alltså

$$(n,k)\in\{(210,1),(15,2),(7,3)\}.$$

Anmärkning: Talet 210 är i själva verket enda talet då man får både $k = 2$ och $k = 3$ förutom det triviala $6 = 3\cdot 2 = 3\cdot 2\cdot 1$. Om man har en sådan lösning så får man nämligen

$$y(y+1) = (x-1)x(x+1) \iff y^2 + y = x^3 - x.$$

Detta är ekvationen för en så kallad elliptisk kurva och information om denna får man på http://www.lmfdb.org/EllipticCurve/Q/37/a/1. Här ser man bl.a. att de enda heltalslösningarna (förutom triviala där båda sidor blir 0) är just $(x,y) = (2,2)$ och $(x,y) = (6,14)$ som svarar mot 6 och 210.

6. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfallet $n = 1$: Vi räknar ut de två olika sidorna och får

$$\mathrm{VL} = \frac{(2\cdot 1)!}{(1!)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

respektive

$$\mathrm{HL} = 2^{2\cdot 1-1} = 2^1 = 2.$$

Alltså gäller att VL$\leq$HL, så det stämmer för $n = 1$.

Induktionssteg. Antag nu att det gäller för något $n = p$, d v s

$$\frac{(2p)!}{(p!)^2} \leq 2^{2p-1}.$$

Vi ska visa att i så fall gäller det också för $n = p + 1$, d v s

$$\frac{(2(p+1))!}{((p+1)!)^2} \leq 2^{2(p+1)-1} = 2^{2p+1}.$$

Vi får

$$\begin{aligned}
\frac{(2(p+1))!}{((p+1)!)^2} &= \frac{(2p)!}{((p)!)^2} \frac{(2p+2)(2p+1)}{(p+1)(p+1)} \\
&\leq 2^{2p-1} \frac{(2p+2)(2p+1)}{(p+1)(p+1)} = 2^{2p-1} \cdot 2^2 \frac{(p+1)(p+1/2)}{(p+1)(p+1)} \\
&= 2^{2p+1} \frac{p+1/2}{p+1} < 2^{2p+1},
\end{aligned}$$

där vi i andra steget utnyttjade induktionsantagandet och i det sista att $p + 1/2 < p + 1$ och att kvoten mellan dessa därför blir mindre än 1.

Med stöd av vårt basfall och induktionssteg ger induktionsprincipen att olikheten gäller för alla positiva heltal n.

7. Vi har att $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ så vi behöver visa att 8, 9 och 5 delar talet. Faktoriserar vi så får vi att

$$n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4) = n \cdot (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Det innehåller alltså speciellt produkten av 5 på varandra följande tal. Ett av dessa måste vara delbart med 5, ett med 3 och ett med 4 samt ytterligare ett delbart med 2. Det betyder att vi vet att $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$ delar talet. Återstår att visa att i själva verket delar 9 talet.

Vi delar in i olika fall beroende på resten vid division av n med 3. Om n är delbart med 3, så kommer $9 | n^2$, så då delar 9 talet. Om $n \equiv 1 \pmod 3$ så kommer 3 dela $n - 1$ och $n + 2$, så då delar 9 talet. Till slut, om $n \equiv 2 \pmod 3$ så kommer 3 dela $n - 2$ och $n + 1$ så också då delar 9 talet. Alltså kommer 9 alltid att dela talet och därmed är vi klara.

8. Vi har att $f_1 = 3$ eftersom alla tre siffrorna förstås funkar i en följd av längd 1. För följder av längd 2 så kan vi inte godkänna följden $1, 2$, men de övriga $3 \cdot 3 - 1 = 8$ fungerar bra. När det gäller följder av längd 3 så kan de två sista siffrorna vara de $f_2 = 8$ möjliga godkända av längd 2. Framför dessa kan man sätta 3 olika siffror och vi får $3f_2$ följder. Dock kommer vissa av dessa inte att vara godkända, nämligen de som startar med 12. Dessa kan man se som att man sätter 12 framför de $f_1 = 3$ godkända av längd 1. Vi får alltså

$$f_3 = 3f_2 - f_1.$$

Vi ska nu generalisera resonemanget till att beräkna f_n om vi vet f_{n-1} och f_{n-2}. Av varje godkänd följd av längd $n - 1$ kan man bilda en följd av längd n genom att sätta en av de tre siffrorna omedelbart före följden. På detta sätt kan man bilda $3f_{n-1}$ olika följder. Nu är inte all dessa godkända, nämligen de följder som man får genom att ta en följd som börjar med en tvåa och sätta en etta framför. Antalet sådana är f_{n-2}, ty med en tvåa i början bildar man en godkänd följd genom att sätta vilken godkänd följd som helst efter denna tvåa. Vi får alltså

$$f_n = 3f_{n-1} - f_{n-2}.$$

för $n \geq 3$ med startvärdena $f_1 = 3$ och $f_2 = 8$.