

Lösningar till
MMG200: 2
14-12-22

① s, s, s, f, f, s, s, s.

② Sats 6.2 i Lay.

③ Sats 1.8

④ a) $v_1 = (-1, 1, 1) - (1, 0, 1) = (-2, 1, 0)$
 $v_2 = (2, 2, 0) - (1, 0, 1) = (1, 2, -1)$
 $A = \frac{1}{\|v_1 \times v_2\|} |v_1 \times v_2| = \frac{1}{\|(-2, -2, -5)\|} = \frac{\sqrt{30}}{2}$
b) $v_3 = (0, 2, 0) - (1, 0, 1) = (-1, 2, -1)$
 $V = \frac{1}{6} |v_3 \cdot (v_1 \times v_2)| = \frac{1}{6} |(-1, 2, -1) \cdot (-2, -2, -5)| = \frac{1}{3}$

⑤ $\begin{cases} -a+b=0 \\ a+b=1 \\ 2a+b=2 \\ 3a+b=2 \end{cases} \Rightarrow Ax=b, \text{ där } A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Vi löser systemet $A^T A x = A^T b$:

$A^T A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, A^T b = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15 & 5 & 11 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \dots \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5/2 \\ 0 & 5 & 7/2 \end{bmatrix} \quad a = 1/2 \quad y = \frac{1}{2} + \frac{7}{10}$
 $b = 7/10$

⑥ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \sim \begin{bmatrix} 0 & -a-1 & 1-2a & -a \\ 0 & 0 & a-2 & 0 \end{bmatrix}$

Om $a \neq -1$ och 2 får vi pivotplats i kolonn 1, 2 och 3

$a = -1$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

dvs pivotplats i kolonn 1, 3 och 4

$a=2$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ och pivotplats i kolonn 1 och 2.

Värderummet till F är lika med kolonnrummet till A och vi får basen enligt följande:

$a \neq -1, 2: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \right\}$. Dimensionen = 3.

$a = -1: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. " = 3.

$a = 2: \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. " = 2

⑦ $x' = Ax, A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Eigenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)$

Eigenvektorer: $\lambda = -1 \quad \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda = 2 \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ger $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Som har lösningen $c_1 = 2, c_2 = -1$
 $x(t) = 2e^{-t} - e^{2t}, y(t) = 4e^{-t} - e^{2t}$

⑧ Om vi sätter $v_1 = (1, 0, 0, 1, 0)^T, v_2 = (0, 1, 1, 0, 1)^T, v_3 = (1, 0, 0, -1, 0)^T$ så är $v_1^T v_2 = v_1^T v_3 = v_2^T v_3 = 0$

Vi har en ortogonalbas för W . Projektionen

av $u = (2, 1, 0, 1, 2)^T$ på W blir därmed

$\hat{u} = \frac{u \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{u \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 + \frac{u \cdot v_3}{\|v_3\|^2} v_3 =$

$= \frac{3}{2} v_1 + \frac{3}{3} v_2 + \frac{1}{2} v_3 = \frac{1}{2} (3, 2, 2, 2, 2)^T = (3/2, 1, 1, 1, 1)^T$

$u = \hat{u} + z$, där $\hat{u} = (3/2, 1, 1, 1, 1)^T \in W$

och $z = (0, 0, -1, 0, 1)^T \in W^\perp$