Lösningar till
MMG 200 del 2.
2015-04-17

1. f, s, s, s, s, f, f, f.

2. a) Sats 2.5 b) Sats 2.6 c) Sats 2.12

3. Sats 5.5

---

4. Vektor längs linjen $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 3)$
punkt på linjen; $\mathbf{x}_1 = (0, -1, 2)$
$\mathbf{x}_2 = (1, 1, -1)$ och $\mathbf{x}_1$ ligger båda i planet
Normalvektorn $\perp$ $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (1, 2, -3)$
$(2,1,3) \times (1,2,-3) = (-9, 9, 3) = 3(-3, 3, 1)$
$\mathbf{n} = (-3, 3, 1)$ och planets ekvation är
$-3(x-1) + 3(y-1) + (z+1) = 0$ eller
$\underline{3x - 3y - z = 1}$

---

5. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$A^TA = \begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 \\ 8 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ - Lös systemet

$$\begin{bmatrix} 18 & 8 & 6 & 10 \\ 8 & 6 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 24 & 18 & 6 & 12 \\ 9 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 14/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{bmatrix}$$

Svar $(x, y, z) = \frac{1}{10}(5, -1, 3)$

6. $A \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bas för <u>kolonnrum</u>: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Vi löser homogena systemet
$x_5 = 0$, $x_4 = s$, $x_3 = -2s$ $x_2 = t$, $x_1 = -2t - s$
Dvs $\mathbf{x} = s(-1, 0, 2, 1, 0)^T + t(-2, 1, 0, 0, 0)$
Bas för <u>nollrum</u>: $\{(-1, 0, 2, 1, 0)^T, (-2, 1, 0, 0, 0)\}$

---

7. Egenvärden: $0 = \det(A - \lambda I) =$

$$= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -2\lambda & -2\lambda \\ -2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(9-\lambda)^2$$

$\lambda_1 = 0$ ger $\begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. $\lambda_2 = 9$ ger $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En lösning är $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2$ Då vet vi att
$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \cdots = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ också är egenvektor.

$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ är en lösning

---

8. Villkoret ger $A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, dvs

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \{\text{invertera}\} \cdots = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$