

Lösningar till
MMG 200:2
2015-08-19

① f f f s s s s s.

② Sats 5 kap 6

③ Sats 8 kap 1

④ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & x & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 3 & 8+4x \\ 0 & x & 4 \end{vmatrix} = -12 + x(8+4x) =$
 $= 4(x^2 + 2x - 3) = 4(x-1)(x+3)$. Kolumnerna
 är därmed linjärt beroende för
 $x=1$ och $x=-3$

⑤ a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 & -5/3 \end{bmatrix}$
 som ger lösningen $(x, y, z) = (4/3, -5/3, 0) + t(-1, 1, 1)$

b) Riktningvektor till skärningslinjen =
 = normalvektor till planet.

Planets ekvation: $-1(x-0) + 1(y-0) + 1(z+1) = 0$,
 dvs $-x + y + z = -1$

⑥ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ visar
 att b_1 ligger i kolonnrummet

b) $A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ som ger lösningen
 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Felvektorn $Ax - b = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

⑦ $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 & 5 \\ -3 & 3-\lambda & 1 \\ -3 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(3+\lambda)\lambda$

$\lambda=3$: $A - 3I = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda=-3$: $A + 3I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=0$: $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

⑧ Benämna vektorerna v_1, v_2, v_3 och ortogonalisera:

$u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \frac{1}{2} (1, 2, -1, 0)^T$

$u_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{v_3 \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2 = \frac{1}{3} (-2, 2, 2, 3)^T$

Projecera: $F(e_1) = \frac{u_1 \cdot e_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{u_2 \cdot e_1}{u_2 \cdot u_2} u_2 + \frac{u_3 \cdot e_1}{u_3 \cdot u_3} u_3 = \frac{1}{4} (6, 1, -2)^T$

P.s.s: $F(e_2) = \frac{1}{7} (1, 6, -1, 2)^T$, $F(e_2) = \frac{1}{7} (1, -1, 6, 2)^T$, $F(e_3) = \frac{1}{7} (-2, 2, 2, 3)^T$.

Avbildningsmatrisen = $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$