

Lösningar till
MMG 200: 2
2015-12-21

① $SSS + SStf$.

② Sats 5, kap 5.

③ Sats 10, kap 1.

④ $v = (-2, 1, 1) - (1, -1, 0) = (-3, 2, 1)$ och
 $w = (2, -1, 2) - (1, -1, 0) = (1, 0, 2)$ ligger i planet.

Normalvektor: $v \times w = (4, 7, -2)$.

a) Planets ekvation: $4(x-1) + 7(y+1) - 2z = 0$,
dvs $4x + 7y - 2z = -3$

b) Tyngdpunkt: $\frac{1}{3}((1, -1, 0) + (-2, 1, 1) + (2, -1, 2)) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$

Linjen: $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1) + t(4, 7, -2)$

⑤ Egenvärden: $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)$

Egenvektorer:

$\lambda=1$: $A-\lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $v_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda=2$: $A-\lambda I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A = PDP^{-1}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^8 = P D^8 P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 255 \\ 0 & 256 \end{bmatrix}$

⑥ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

kolonn 1 och 2 är pivotkolonner,

Bas för $\text{col} A = \{(1, 0, 1)^T, (2, 1, 1)^T\}$

6, forts.

Lös $AX=0$: x_3, x_5 är fria:

$x_5 = t$, $x_4 = s$, $x_3 = r$ ger $x_2 = -r$, $x_1 = -r - 2s - t$, och

$X = r(-1, -1, 1, 0, 0)^T + s(-2, 0, 0, 1, 0)^T + t(-1, 0, 0, 0, 1)^T$

Bas för $\text{Nul} A: \{(-1, -1, 1, 0, 0)^T, (-2, 0, 0, 1, 0)^T, (-1, 0, 0, 0, 1)^T\}$

⑦ $y = at^2 + bt + c$ ger med insättning av data:

$\begin{cases} 4a - 2b + c = 2 \\ a - b + c = 0 \\ a + b - c = 1 \end{cases}$, dvs $AX=b$ där $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Då är $[A^T A | A^T b] = \begin{bmatrix} 18 & -8 & 6 & 9 \\ -8 & 6 & -2 & -3 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 9/20 \\ 0 & 0 & 1 & -3/20 \end{bmatrix}$

Därmed $y = \frac{3}{4}t^2 + \frac{9}{20}t - \frac{3}{20}$

⑧ $u_1 = (1, 1, -1, 0)^T$, $u_2 = (1, -1, 1, -2)^T$. Ortogonalisera:

$v_1 = u_1$, $v_2' = u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1}{|u_1|^2} u_1 = (1, -1, 1, -2)^T - \frac{1}{3}(1, 1, -1, 0)^T =$

$= \frac{1}{3}(4, -2, 2, -6)^T = \frac{2}{3}(2, -1, 1, -3)^T$ $v_2 = (2, -1, 1, -3)^T$

ON-bas för V : $\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{15}}(2, -1, 1, -3)^T\}$

$V^\perp = \text{Nul} A$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

och i lösning till $AX=0$ är x_3, x_4 fria.

Vi får $x_4 = t$, $x_3 = s$, $x_2 = s - t$, $x_1 = t$, dvs

$X = (t, s-t, s, t)^T = s \underbrace{(0, 1, 1, 0)^T}_{u_3} + t \underbrace{(1, -1, 0, 1)^T}_{u_4}$

Ortogonalisera: $v_3 = u_3$, $v_4 = u_4 - \frac{u_3 \cdot u_4}{|u_3|^2} u_3 =$

$= (1, -1, 0, 1)^T - \frac{1}{2}(0, 1, 1, 0)^T = \frac{1}{2}(2, -1, 1, 2)^T$

ON-bas för $V^\perp$: $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)^T, \frac{1}{\sqrt{10}}(2, -1, 1, 2)^T\}$