Lösningar till
MMG 200 del 2
2016-04-08

① f s s f s f s f

② Sats 2 i 6.1.

③ Sats 2 i 2.1

---

④ Lös ekvationssystemet:

a) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$z = t$, $y = \frac{1}{2} + 3t$, $x = 2 + 4t$. Skärningslinje:

$\underline{(x, y, z) = (2, 1/2, 0) + t(4, 3, 1)}$

b) Normalvektor till planet = riktningsvektor till skärningslinjen = $n = (4, 3, 1)$ och planet: $4(x-1) + 3(y-2) + (z+1) = 0$, dvs

$\underline{4x + 3y + z = 9}$

---

⑤ $$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t$, $x_2 = s$ ger $x_3 = -t$, $x_1 = 2s + t$ och

$x = s\underbrace{(2, 1, 0, 0)^T}_{u_1} + t\underbrace{(1, 0, -1, 1)^T}_{u_2}$

$\{u_1, u_2\}$ är då en bas. Ortogonalisera:

$v_1 = u_1$. $v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{|v_1|^2} v_1 =$

$= (2, 1, 0, 0)^T - \frac{2}{3}(1, 0, -1, 1)^T = \frac{1}{3}(4, 3, 2, -2)^T$

ON-bas: $\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, -1, 1), \frac{1}{\sqrt{33}}(4, 3, 2, -2)^T \}$

---

⑥ $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$ vilket

visar att $b \notin$ Nul A. Lös $A^T A = A^T b$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ger lösningen $\underline{x = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0) + t(-1, 1, 1)}$

---

⑦ $x_{n+1} = A x_n$, där $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Sök egenvärden:

$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda+1)(\lambda-5)$. Egenvektorer:

$\underline{\lambda = -1}$ $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$\underline{\lambda = 5}$ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_n = a(-1)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + b \cdot 5^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ ger

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\underline{\begin{cases} x_n = 4 \cdot 5^n - 3(-1)^n \\ y_n = 4 \cdot 5^n + 6(-1)^n \end{cases}}$

---

⑧ $u_1 = (1, 1, -1)^T$, $u_2 = (1, 3, -5)^T$. Ortogonalisera:

$v_1 = u_1$, $v_2 \,/\!/\, u_2 - \frac{v_1 \cdot u_2}{|v_1|^2} v_1 = (1, 3, -5)^T - \frac{9}{3}(1, 1, -1)^T = -2(1, 0, 1)^T$

Välj $v_2 = (1, 0, 1)^T$. Projicera standardbasvektorerna

$F(e_1) = \frac{e_1 \cdot v_1}{|v_1|^2} v_1 + \frac{e_1 \cdot v_2}{|v_2|^2} v_2 = \frac{1}{3}(1, 1, -1)^T + \frac{1}{2}(1, 0, 1)^T =$

$= \frac{1}{6}(5, 2, 1)^T$. $F(e_2) = \frac{1}{3} v_1 + 0 v_2 = \frac{1}{3}(1, 1, -1)^T$, och

$F(e_3) = -\frac{1}{3}(1, 1, -1)^T + \frac{1}{2}(1, 0, 1)^T =$

$= \frac{1}{6}(1, -2, 5)^T$. Då är $\underline{A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}}$