Lösningar till
MMG 200:2
2016-12-19

1) s s f f f s s s

2) Sats 2.2

3) Sats 1.10

---

4) $\mathbf{v}_1 = \overline{P_1P_2} = (-1,2,2) - (1,-1,1) = (-2,3,1)$

a) $\mathbf{v}_2 = \overline{P_1P_3} = (2,1,-1) - (1,-1,1) = (1,2,-2)$

Arean $= \frac{1}{2}|(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)| = \frac{1}{2}|(-8,-3,-7)| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{122}}{2}}}$

b) $\overline{OT} = \frac{1}{3}(OP_1 + OP_2 + OP_3) = \frac{1}{3}((1,-1,1)+(-1,2,2)+(2,1,-1)) = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)}}$

---

5) Med $\lambda = -3$ är $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \sim \dots \sim$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Det ger att $\lambda = -3$ är ett egenvärde och tillhörande egenvektor är $t\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Med $\lambda = 3$ är $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \dots$

$\dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Det ger att $\lambda = 3$ är ett dubbelt egenvärde och egenrummet blir

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u+2s \\ s \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Välj $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

och $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

---

6) $y = x_1 + x_2 t$ ger ekvationer

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 = 2 \end{cases}$, dvs $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ med $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$, $A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 6 \\ 10 & 30 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$x_1 = 1/2$, $x_2 = 2/5$ $\quad \underline{y = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}t}$

$A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = \frac{1}{10}\left(\begin{bmatrix} 9 \\ 13 \\ 17 \\ 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}}$

---

7) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bas för Col A är $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$. Lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$\begin{cases} x_1 = 2t - 2s + 2u \\ x_2 = t \\ x_3 = s - 3u \\ x_4 = s \\ x_5 = u \end{cases}$ $\quad \mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bas för Nul A: $\underline{\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$

ON-bas för Col A: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Dvs $\underline{\left\{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}}$

---

8) $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0,0)^T - \frac{1}{2}(1,0,0,1)^T = \frac{1}{2}(1,-2,0,-1)^T$

$\mathbf{v}_3 = (1,0,1,0)^T - \frac{1}{2}(1,0,0,1)^T - \frac{1}{6}(1,-2,0,-1)^T = \frac{1}{3}(1\ 1\ 3\ -1)^T$

Med $U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{12} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 3/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} & -1 \end{bmatrix}$ så

blir avbildningsmatrisen $= UU^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$