

$A \sim U \sim V$, reducerade trappstegsmatriser

$$U = (u_1 \dots u_n), \quad V = (v_1 \dots v_n)$$

Obs: $Ux = 0 \Leftrightarrow Vx = 0$

Induktion $\vee u_1 = v_1 =$

$$u_1 = 0 \text{ eller } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ och samma för } v_1$$

$$u_1 = 0 \Rightarrow U \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow V \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = 0$$

$$\text{P.s.s. } v_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \quad \text{klart}$$

2) Antag $u_i = v_i$ för $i < j$. Visa att $u_j = v_j$

Låt $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ vara pivotkolonnerna till vänster om kolonn j . Då är

$$u_j = \sum_{k=1}^r \gamma_k u_{i_k}$$

$$\text{Bild } x \text{ genom } x_i = \begin{cases} \gamma_k & \text{för } i = i_k \\ -1 & \text{för } i = j \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad (\text{se ex.})$$

$$\text{Då är } Ux = \sum_{k=1}^r \gamma_k u_{i_k} - u_j = u_j - u_j = 0$$

Och därmed

$$0 = Vx = \sum_{k=1}^r \gamma_k u_{i_k} - v_j = u_j - v_j$$

$$\text{Alltså } u_j = v_j.$$

