MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2018-08-30.

1. Se boken sidorna 122, 125 och 134.
2. (a) Se boken sidorna 215-216 och 218.
   (b) Se boken sidan 219.
3. Se boken sidorna 77-78.
4. (a) Vi använder Euklides algoritm:

$$\begin{aligned}
2926 &= 1 \cdot 1841 + 1085 \\
1841 &= 1 \cdot 1085 + 756 \\
1085 &= 1 \cdot 756 + 329 \\
756 &= 2 \cdot 329 + 98 \\
329 &= 3 \cdot 98 + 35 \\
98 &= 2 \cdot 35 + 28 \\
35 &= 1 \cdot 28 + 7 \\
28 &= 4 \cdot 7.
\end{aligned}$$

   Från detta drar vi slutsatsen att $\mathrm{SGD}(2926, 1841) = 7$.

   (b) Eftersom 7 delar både 2926 och 1841 så kommer 7 att dela $2926x + 1841y$ för alla $x, y \in \mathbb{Z}$. Därför kommer aldrig $2926x + 1841y = 3$ om $x, y \in \mathbb{Z}$ och alltså saknas det sådana lösningar.
5. (a) Det finns 9 bokstäver och av dessa finns det två dubbla (T och R) och en trippel (E). Det betyder att det totala antalet möjliga ord är

$$\frac{9!}{2!2!3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 6} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 72 \cdot 210 = 15120.$$

   (b) Det är enklare att räkna ut antalet som innehåller tre E i rad och subtrahera detta från det totala antalet. Antalet möjliga ord med de övriga sex bokstäverna är $6!/(2!)^2$. Man kan sedan placera in E:na på sju olika ställen. Det ger att antalet utan tre E i rad är

$$15120 - 7 \cdot \frac{6!}{2!2!} = 15120 - \frac{7!}{4} = 15120 - 1260 = 13860.$$

6. Definiera först

$$f(n) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \text{ och } g(n) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

   Vi ska då visa att $f(n) = g(n)$ för alla heltal $n \geq 1$. Vi gör ett induktionsbevis.

Basfall: Om $n = 1$ så får vi

$$f(1) = \sum_{k=1}^{2} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$
$$g(1) = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}.$$

Alltså stämmer det för $n = 1$.

Induktionssteg: Antag att $f(p) = g(p)$ för något $p \geq 1$. Visa att i så fall är $f(p+1) = g(p+1)$. Vi startar med $f(p+1)$ och får om vi i fjärde steget utnyttjar induktionsantagandet att

$$\begin{aligned}
f(p+1) &= \sum_{k=1}^{2(p+1)} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= f(p) + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} = g(p) + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= \sum_{k=p+1}^{2p} \frac{1}{k} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= \sum_{k=(p+1)+1}^{2(p+1)} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} \\
&= g(p+1) + \frac{1}{p+1} - 2\frac{1}{2p+2} = g(p+1).
\end{aligned}$$

Enligt indukionsprinipen gäller därmed, med stöd av basfall och induktionssteg, att $f(n) = g(n)$ för alla heltal $n \geq 1$.

7. (a) Alla element i $[(1,0)] = \{(x,0) : x \neq 0\}$ och i $[(0,0)] = \{(0,0)\}$ ger värdet 0. Alla andra ekvivalensklasser innehåller bara element (x,y) med $y \neq 0$. Tag två godtyckliga element (x,y) och (cx,cy) ur samma ekvivalensklass $(c, y \neq 0)$. Eftersom $\frac{x}{y} = \frac{cx}{cy}$ så ger f samma värde för de båda elementen i $[(x,y)]$ och alltså beror inte värdet av f på vilken representant man väljer.

   (b) T.ex. är $(1,1)$ och $(2,2)$ i samma ekvivalensklass, men g ger värdena 1 respektive 4.

   (c) Den är inte injektiv, ty $[(0,0)] \neq [(1,0)]$ men $f([(0,0)]) = f([(1,0)])$.

   (d) Den är surjektiv, ty givet $r \in \mathbb{R}$ så är $f([(r,1)]) = r$.

8. Vi tittar på ekvationen modulo 4. Vi har att $s_n + 1$ uppenbarligen är delbart med 4, eftersom $(s_n + 1)/4$ är heltalet som består av $n+1$ ettor. Alltså är $s_n \equiv 3 \pmod 4$. Å andra sidan så är $x^2 \equiv 0 \pmod 4$ eller $x^2 \equiv 1 \pmod 4$ (och samma för y^2 förstås), eftersom om man kvadrerar $0, 1, 2, 3$ så får man $0, 1, 0, 1$ modulo 4. Det betyder att $x^2 + y^2$ är kongruent med $0, 1$ eller 2 modulo 4. Alltså saknar ekvationen $x^2 + y^2 = s_n$ lösning för alla $n \geq 0$.