MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2018-01-02.

1. (a) Se boken sidorna 231 och 234.
   (b) Man kan t ex ta heltalen med (vanlig) addition och multiplikation, alternativt $\mathbb{Z}_n$ där $n > 1$ *inte* är ett primtal med addition och multiplikation modulo n. I båda fallen har inte alla tal multiplikativ invers.

2. Se boken sidorna 136-137.

3. Se sidan 61 i boken.

4. Vi räknar modulo 10 för att få fram entalssiffran. Genom att ta successiva potenser får vi att

$$\begin{aligned} 2017^2 &\equiv 7^2 = 49 \equiv 9 \pmod{10} \\ 2017^3 &\equiv 9 \cdot 7 = 63 \equiv 3 \pmod{10} \\ 2017^4 &\equiv 3 \cdot 7 = 21 \equiv 1 \pmod{10}. \end{aligned}$$

   Detta ger att

$$2017^{2018} \equiv 7^{4 \cdot 504 + 2} = \left(7^4\right)^{504} \cdot 7^2 \equiv 1^{504} \cdot 49 \equiv 9 \pmod{10}$$

   och alltså blir entalssiffran 9. För den omvända potensen får vi

$$\begin{aligned} 2018^2 &\equiv 8^2 = 64 \equiv 4 \pmod{10} \\ 2018^3 &\equiv 4 \cdot 8 = 32 \equiv 2 \pmod{10} \\ 2018^4 &\equiv 2 \cdot 8 = 16 \equiv 6 \pmod{10} \\ 2018^5 &\equiv 6 \cdot 8 = 48 \equiv 8 \pmod{10} \end{aligned}$$

   och vi ser att resterna upprepar sig med perioden 4. Eftersom $2017 \equiv 1 \pmod{4}$ så blir entalssiffran 8 för 2018^{2017}.

5. Sätt $f(n) = 3^n - 2^n$. Vi ska då visa att $a_n = f(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi gör ett induktionsbevis.

   Basfall: Eftersom rekursionen för a_n innehåller både a_{n-1} och a_{n-2} så behöver vi troligen två basfall. Om vi sätter $n = 0$ respektive $n = 1$ så får vi

$$f(0) = 3^0 - 2^0 = 1 - 1 = 0 = a_0 \text{ respektive } f(1) = 3^1 - 2^1 = 3 - 2 = 1 = a_1,$$

   så det stämmer för $n = 0$ och $n = 1$.

   Antag nu att $f(k) = a_k$ för alla $0 \leq k < n$ för något $n \geq 2$. Visa att i så fall är $f(n) = a_n$. Eftersom $n \geq 2$ så ger rekursionen och vårt antagande att

$$\begin{aligned} a_n &= 5a_{n-1} - 6a_{n-2} = 5f(n-1) - 6f(n-2) \\ &= 5(3^{n-1} - 2^{n-1}) - 6(3^{n-2} - 2^{n-2}) \\ &= 15 \cdot 3^{n-2} - 10 \cdot 2^{n-2} - 6 \cdot 3^{n-2} + 6 \cdot 2^{n-2} \\ &= 9 \cdot 3^{n-2} - 4 \cdot 2^{n-2} = 3^2 \cdot 3^{n-2} - 2^2 \cdot 2^{n-2} = 3^n - 2^n = f(n). \end{aligned}$$

   Enligt induktionsprincipen gäller därmed att $a_n = f(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

6. (a) Det finns 13 olika valörer för de fyra korten med samma valör och dessutom 48 kort kvar att välja det sista kortet bland. Multiplikationsprincipen ger att det blir $13 \cdot 48 = 624$ olika fyrtal.

   (b) Det finns 10 olika valörer som kan vara lägsta valör (ess,2,3,...,9,10). För var och ett av de fem korten finns det 4 olika färger, så totalt blir det 4^5 olika varianter på färger för de fem korten. Dock tillåts inte alla vara av samma färg (finns 4 sådana) så det betyder att det blir $4^5 - 4$ olika godkända varianter av färger för de fem korten. Totalt blir antalet stegar alltså

$$10(4^5 - 4) = 10(1024 - 4) = 10200.$$

   (c) Det finns 4 olika färger och givet en färg ska man välja 5 kort bland 13. Totalt blir det med multilpikatinsprincipen

$$\begin{aligned} 4 \cdot \binom{13}{5} &= \frac{4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= 4 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 = 52 \cdot 99 = 5148. \end{aligned}$$

   Dock finns det för varje färg 10 stycken olika färgstegar så vi måste subtrahera $4 \cdot 10 = 40$ så antalet händer med färg blir 5108.

7. Vi har att $f_1 = 3$ eftersom alla tre siffrorna förstås funkar i en följd av längd 1 och på samma sätt blir $f_2 = 3^2 = 9$. För följder av längd 3 så kan vi inte godkänna följden 123, men de övriga $3^3 - 1 = 26$ fungerar bra. När det gäller följder av längd 4 så kan de tre sista siffrorna vara de $f_3 = 26$ möjliga godkända av längd 3. Framför dessa kan man sätta 3 olika siffror och vi får $3f_3$ följder. Dock kommer vissa av dessa inte att vara godkända, nämligen de som startar med 123. Dessa kan man se som att man sätter 123 framför de $f_1 = 3$ godkända av längd 1. Vi får alltså

$$f_4 = 3f_3 - f_1.$$

Vi ska nu generalisera resonemanget till att beräkna f_n om vi vet f_{n-1}, f_{n-2} och f_{n-3}. Av varje godkänd följd av längd $n-1$ kan man bilda en följd av längd n genom att sätta en av de tre siffrorna omedelbart före följden. På detta sätt kan man bilda $3f_{n-1}$ olika följder. Nu är inte alla dessa godkända, nämligen de följder som man får genom att ta en följd som börjar med 23 och sätta en etta framför. Antalet sådana är f_{n-3}, ty med 23 i början bildar man en godkänd följd genom att sätta vilken godkänd följd som helst efter 23. Vi får alltså

$$f_n = 3f_{n-1} - f_{n-3}.$$

för $n \geq 4$ med startvärdena $f_1 = 3$, $f_2 = 9$ och $f_3 = 26$.

8. (a) Formeln för en geometrisk summa ger

$$\sum_{r=0}^{2m} (-x)^r = \frac{1 - (-x)^{2m+1}}{1 - (-x)} = \frac{1 - (-x^{2m+1})}{1 + x} = \frac{1 + x^{2m+1}}{1 + x}$$

   så $x^{2m+1} + 1 = (x+1)\sum_{r=0}^{2m}(-x)^r$ vilket ger att $x+1$ delar $x^{2m+1}+1$ eftersom summan uppenbarligen är ett heltal.

(b) Vi visar det kontrapositiva påståendet att om k inte är en tvåpotens så är det inte ett primtal. Om k inte är en tvåpotens så har k en udda faktor så $k = s(2m+1)$ för några positiva heltal s och m. Om vi sätter $x = 2^s$ i första deluppgiften så får vi att $2^s + 1$ delar

$$(2^s)^{2m+1} + 1 = 2^{s(2m+1)} + 1 = 2^k + 1.$$

Eftersom $s > 0$ så är $2^s + 1 \geq 3$ och eftersom $m > 0$ så är $2^k > 2^s$ så $2^s + 1$ är en äkta delare till $2^k + 1$. Alltså är $2^k + 1$ inget primtal.