MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2017-10-23.

1. Se boken sidorna 178-179.

2. Se boken sidorna 75-76 för definitionerna. Exempel på en relation skulle t ex kunna vara att två positiva heltal är relaterade om och endast om deras kvot är en tvåpotens. Vi kommer att få oändligt många ekvivalensklasser för ett udda tal kommer inte att vara relaterad till något mindre tal så alla klasser $[2n+1]$ kommer vara olika för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. I själva verket kommer detta att ge precis alla klasser för ett jämnt tal $2n$ kommer vara relaterat till n. Varje klass kommer också att innehålla oändligt många element ty
$$[2n+1] = \{x \in \mathbb{Z} : x = (2n+1)2^k,\ k \in \mathbb{N}\}$$
som innehåller oändligt många positiva heltal.

3. Se boken sidan 135.

4. Vi använder Euklides (utökade) algoritm för att hitta en (1) lösning till ekvationen:
$$\begin{aligned} 1113 &= 3 \cdot 303 + 204 \\ 303 &= 1 \cdot 204 + 99 \\ 204 &= 2 \cdot 99 + 6 \\ 99 &= 16 \cdot 6 + 3 \\ 6 &= 2 \cdot 3. \end{aligned}$$
Från detta drar vi slutsatsen att $\operatorname{sgd}(1113, 303) = 3$. Vi uttrycker nu 3 som en linjärkombination av 1113 och 303 med den utökade algoritmen som ger
$$\begin{aligned} 3 &= 99 - 16 \cdot 6 = 99 - 16 \cdot (204 - 2 \cdot 99) = 33 \cdot 99 - 16 \cdot 204 \\ &= 33(303 - 204) - 16 \cdot 204 = 33 \cdot 303 - 49 \cdot 204 \\ &= 33 \cdot 303 - 49 \cdot (1113 - 3 \cdot 303) = 180 \cdot 303 - 49 \cdot 1113. \end{aligned}$$
Genom att förlänga båda leden med 5 får vi att $15 = 900 \cdot 303 - 245 \cdot 1113$. Alltså är $x = -245$ och $y = 900$ en lösning. Samtliga lösningar ges nu av
$$\begin{aligned} x &= -245 + n \cdot \frac{303}{\operatorname{sgd}(1113, 303)} = -245 + 101n, \\ y &= 900 - n \cdot \frac{1113}{\operatorname{sgd}(1113, 303)} = 900 - 371n, \end{aligned}$$
där $n \in \mathbb{Z}$.

5. (a) Det finns två stycken dubbletter (A och T) och därför blir antalet olika permutationer av 9 bokstäver
$$\frac{9!}{2!2!} = \frac{9!}{4} = 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 90720.$$

(b) Det är enklare att räkna ut antalet permutationer som har två likadana bokstäver bredvid varandra och subtrahera detta från svaret i första deluppgiften.

Vi börjar med att räkna ut hur många ord som har två A bredvid varandra. Om man har n lediga platser bredvid varandra så finns det $n-1$ ställen man kan placera ett par bredvid varandra. Det finns alltså 8 ställen som paret av A:n kan vara. Därefter ska man permutera de övriga 7 bokstäverna med en dubblett så totalt blir det

$$8 \cdot \frac{7!}{2!} = \frac{8!}{2!} = 20160.$$

Antalet permutationer med två T bredvid varandra är förstås lika många d v s 20160. Om man adderar dessa kommer man ju dock att räkna de som har både två A och två T bredvid varandra dubbelt. Vi måste alltså räkna ut hur många sådana det finns och subtrahera detta.

Vi såg ovan att det blev $8!/2!$ och ett alternativt sätt att tänka är att man betraktar paret av A (respektive T) som en enda bokstav eftersom de ändå ska hänga ihop. Ännu mer praktiskt blir det nu när vi ska ha både A och T tillsammans. Man kan helt enkelt tänka sig att vi har 7 bokstäver som vi ska permutera. Vi får alltså

$$7! = 5040$$

ord som har både A:na och T:na bredvid varandra. Vårt svar blir alltså

$$90720 - (2 \cdot 20160 - 5040) = 55440.$$

6. Vi sätter

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)^2 \text{ och } f(n) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$$

och ska alltså visa att $s(n) = f(n)$ för alla positiva heltal n.

Vi gör ett induktionsbevis och börjar med basfallet $n = 1$ som ger

$$s(1) = \sum_{k=1}^{1} k(k+1)^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$$

och

$$f(1) = \frac{1(1+1)(1+2)(3 \cdot 1 + 5)}{12} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 8}{12} = 4.$$

Alltså stämmer likheten då $n = 1$.

Antag nu att $s(n) = f(n)$ för något positivt heltal n. Vi ska visa att i så fall gäller det också att $s(n+1) = f(n+1)$. Vi får genom att utnyttja antagandet att

$$\begin{aligned}
s(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)^2 = s(n) + (n+1)(n+1+1)^2 \\
&= f(n) + (n+1)(n+2)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12} + (n+1)(n+2)^2 \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n(3n+5)+12(n+2))}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(3n^2+17n+24)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(3n+8)}{12} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(3(n+1)+5)}{12} = f(n+1).
\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därmed att $s(n) = f(n)$ för alla positiva heltal n.

7. Vi ska visa att $\star$ är kommutativ och associativ, att det finns en identitet och att alla element har invers.

   Kommutativ: Eftersom $a_i = b_i$ om och endast om $b_i = a_i$ så blir den kommutativ.

   Associativ: Vi beräknar det i:te talet för $\mathbf{s} = \mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c})$ respektive $\mathbf{t} = (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c}$. Om dessa stämmer överens så är den associativ. Vi får att $s_i = 0$ om och endast om

$$(a_i = 0 \text{ och } b_i = c_i) \text{ eller } (a_i = 1 \text{ och } b_i \neq c_i)\,.$$

   I det första alternativet är antingen $a_i = b_i = c_i = 0$ eller $a_i = 0$, $b_i = c_i = 1$ och i det andra $b_i = 0$, $a_i = c_i = 1$ eller $c_i = 0$, $a_i = b_i = 1$. Alltså är $s_i = 0$ om och endast om ett jämnt antal av talen i $\{a_i, b_i, c_i\}$ är 1. Detta villkor är symmetriskt i de tre variablerna och man kan därför byta plats på dem och tillsammans med kommutativiteten ger det

$$\mathbf{a} \star (\mathbf{b} \star \mathbf{c}) = \mathbf{c} \star (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \star \mathbf{c}.$$

   Identitet: Följden med enbart nollor är identitet, ty $a_i = 0$ ger $c_i = b_i$ i definitionen av $\star$.

   Invers: Varje element är sin egen invers eftersom per definition är då uppenbarligen varje tal i följden samma om man tar $a \star a$. Därmed får man identiteten som ju består av enbart nollor.

8. Alla udda primtal är antingen på formen $4n+1$ ($\equiv 1 \pmod 4$) eller $4n-1$ ($\equiv 3 \pmod 4$). Antag att det bara finns ändligt många primtal $p_1, p_2, \ldots, p_r$ på formen $4n-1$.

   Idén bygger på att hitta ett tal som är kongruent med 3 modulo 4 som inte delas av något av de uppräknade primtalen. Detta skulle leda till en motsägelse, eftersom ett tal som bara delas av primtal som är kongruenta med 1 modulo 4 kommer att vara kongruent med 1 modulo 4. Detta gäller eftersom modulo 4 blir alla (prim)faktorerna 1 och därmed är produkten också 1 modulo 4.

Ett lämpligt val är

$$a = 4 \prod_{i=1}^{r} p_i - 1,$$

som är kongruent med 3 modulo 4 och som inte delas av något av primtalen eftersom alla delar $a+1$. Alltså finns det oändligt många primtal på formen $4n-1$.