MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2018-08-30.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Milo Viviani 031-772 5325, Examinator nås på: 031-772 5303.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Definiera begreppen *delare*, *största gemensamma delare* och *primtal*. (2p)

2. Låt G vara en mängd med en operator $\star$.

   (a) Ge de fyra axiomen att $(G, \star)$ är en abelsk grupp.

   (b) Låt $(G, \star)$ vara en abelsk grupp och $x, y, z \in G$. Visa utifrån axiomen att om $x \star y = x \star z$ så är $y = z$. Ange i varje steg vilket axiom du använder, så speciellt ska det framgå vilka av de fyra axiomen som används i beviset.

   (4p)

3. Låt R vara en ekvivalensrelation på en mängd A. Visa att ekvivalensklasserna till R utgör en partition av A. (3p)

4. (a) Beräkna SGD$(2926, 1841)$.

   (b) Bestäm alla lösningar $x, y \in \mathbb{Z}$ till $2926x + 1841y = 3$. (3p)

5. (a) Hur många olika "ord" med 9 bokstäver kan man bilda av bokstäverna i ordet TETRAEDER?

   (b) Hur många av dessa "ord" har inte tre "E" i rad? (3p)

6. Visa att

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$$

   för alla heltal $n \geq 1$. (3p)

Var god vänd!

7. Vi definierar en ekvivalensrelation $\mathcal{R}$ på $\mathbb{R}^2$ genom:

$$(x_1, y_1)\mathcal{R}(x_2, y_2) \iff \exists c \neq 0 \;\; x_1 = cx_2 \text{ och } y_1 = cy_2.$$

Låt E vara mängden av ekvivalensklasser m.a.p. $\mathcal{R}$ och låt $[(x, y)]$ beteckna ekvivalensklassen av (x, y).

(a) Visa att

$$f([(x, y)]) = \begin{cases} \frac{x}{y} & \text{om } y \neq 0, \\ 0 & \text{om } y = 0, \end{cases}$$

ger en väldefinierad funktion $f : E \to \mathbb{R}$, dvs. att definitionen inte beror på vilken representant man väljer i en ekvivalensklass.

(b) Visa att

$$g([(x, y)]) = xy$$

inte ger en väldefinierad funktion $g : E \to \mathbb{R}$.

(c) Är funktionen f injektiv?

(d) Är funktionen f surjektiv?

(4p)

8. Låt s_n vara det naturliga tal som består av n stycken fyror följt av en trea, så att t ex är $s_4 = 44443$. Visa att inget av dessa tal kan skrivas som summan av två heltalskvadrater, d v s att ekvationen $x^2 + y^2 = s_n$ med $x, y \in \mathbb{Z}$ saknar lösningar för alla $n \geq 0$. (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 13 september. Därefter kan skrivningar granskas och hämtas ut på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.