MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare**
Göteborgs Universitet Datum: 2018 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Anders Hildeman
Telefon: ankn 5325

MMG200 Envariabelsanalys

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: G: 14-21 poäng, VG: 22-25 poäng (22-31 poäng inklusive eventuella duggapoäng).
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Varje uppgift omfattar 3 poäng utom uppgift 8 som omfattar 4 poäng. Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

Del 1

1. Bestäm om gränsvärdet finns och i så fall beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x\to\infty} x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (1p)$$

When $x \to \infty$, $\frac{1}{x} \to 0$. Which angle has tangent equal to zero? Well, zero! So, the $\arctan(1/x) \to 0$ when $x \to \infty$. On the other hand, $x \to \infty$. So, we can re-write this and use l'hopital's rule and the chain rule:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(-x^{-2})\frac{1}{1+(1/x)^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+(1/x)^2} = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^3+3x^2-9} - \sqrt{x^3+3x^2+9} \qquad (1p)$$

For this one, we will complete the square and see what happens:

$$\sqrt{x^3+3x^2-9} - \sqrt{x^3+3x^2+9} = \frac{x^3+3x^2-9-(x^3+3x^2+9)}{\sqrt{x^3+3x^2-9}+\sqrt{x^3+3x^2+9}}$$

$$= \frac{-18}{\sqrt{x^3+3x^2-9}+\sqrt{x^3+3x^2+9}}.$$

So, the limit is the same as

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-18}{\sqrt{x^3+3x^2-9}+\sqrt{x^3+3x^2+9}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} \qquad (1p)$$

For this one we can use l'hopital again because the top and bottom are both tending to zero:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = 0.$$

2. (1p) Hitta alla lösningar i $\mathbb{C}$ till: $t^2 + 2 = 0$. Let us re-write this as

$$t^2 = -2.$$

Then,

$$t = \sqrt{-2} = \sqrt{-1}\sqrt{2}.$$

Either you just see it this way and recognize that

$$t = \pm i\sqrt{2},$$

or you can use the polar coordinate method to write

$$-1 = e^{i\pi + i2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Then,

$$\sqrt{-1} = e^{i\pi/2 + ik\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

The first two are for $k = 0$ and $k = 1$, which give

$$e^{i\pi/2}, \quad e^{i\pi/2+i\pi}.$$

For higher k, (or lower k), the complex number is one of these two, because $e^{2k\pi i} = 1 \forall k \in \mathbb{Z}$. So in this way, we write the solutions as

$$\sqrt{2}e^{i\pi/2} \quad \sqrt{2}e^{i\pi/2+i\pi}.$$

Both ways are correct! (2p) Hitta alla lösningar i $\mathbb{C}$ till: $x^4+4x^2+4 = 0$. This is a quadratic equation in x^2. Let $t = x^2$. The equation is:

$$t^2 + 4t + 4 = 0 \iff (t + 2)^2 = 0.$$

So, the solutions are t with

$$t + 2 = 0.$$

Since $t = x^2$, in terms of x we need

$$x^2 + 2 = 0.$$

These are precisely what we found in the first part of the problem!

3. Låt $f(x) = \ln(1 + e^{\sin(x)})$.

(a) Beräkna $f'(x)$. (1p) Well let's beräkna:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)e^{\sin(x)}}{1 + e^{\sin(x)}}.$$

(b) Hitta alla punkter i $\mathbb{R}$ med $f'(x) = 0$. (1p) These points are precisely when the numerator vanishes which is when

$$x = (k + 1/2)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(c) Hitta funktionens maximum och minimum i $[0, 1]$. (1p) Well, $\pi > 3$, so there are no points of the form $(k + 1/2)\pi$ in the interval $[0, 1]$. So, let's see what the sign of the derivative is: for $x \in [0, 1]$,

$$f'(x) = \frac{\cos(x)e^{\sin(x)}}{1 + e^{\sin(x)}} > 0.$$

So the function is increasing. That means the minimum is at $x = 0$, and the maximum is at $x = 1$. These values are $f(0) = 0$, and $f(1) = \ln(1 + e^{\sin(1)})$.

4. (a) Ge ett exempel av en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är kontinuerlig i alla punkter i $\mathbb{R}$ men som inte är deriverbar i minst en punkt i $\mathbb{R}$. (1p) Such an example is $f(x) = |x|$.

   (b) Ge ett exempel av en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är injektiv[1] men inte är surjektiv.[2] (1p) Such an example is $f(x) = e^x$.

   (c) Ge ett exempel av en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är surjektiv men inte är injektiv. (1p) Such an example is $f(x) = \tan(x)$.

Del 2

5. (a) Beräkna $\int \frac{x^2}{x+1} dx$. (1 p.)

$$\int \frac{x^2}{x+1} dx = \int (x - 1 + \frac{1}{x+1}) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) + C.$$

   (b) Beräkna $\int\limits_{1/e}^{e} \frac{\arctan(\ln(x))}{x} dx$. (2 p.)

$$\int\limits_{1/e}^{e} \frac{\arctan(\ln(x))}{x} dx = [y = \ln(x), dy = \frac{dx}{x}] = \int\limits_{-1}^{1} \arctan(y) dy = 0,$$

ty $\arctan(y)$ är odda och vi integrerar över ett interval symmetrisk kring origo.

6. Ytan begränsad av kurvorna $y = x$, $y = 0$, och $x = 1$ roterar kring x och y-axelarna. Beräkna båda rotationskroppernas volymer. (3 p.)

Om vi roterar kring x-axeln, så får vi en kon, med volum $\pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}\pi$. Om vi roterar kring y-axeln, så får vi en cylinder med en kon borttagen, och då konen råkar vara likadant, som den vi har redan beräknat volumen till. Alltså blir den andra volumen $\pi \cdot 1^2 - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$.

7. (a) Lös differentialekvationen $y'' + 2y' + 2y = 2x$. (2 p.)

   (b) Lös begynnelsevärdesproblemet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. (1 p.)

(a) $y = y_p + y_h$. Här y_h är lösningen till $y'' + 2y' + 2y = 0$, så vi betraktar karakteristisk ekvationen $r^2 + 2r + 2 = 0$, med röterna $r_1 = -1 + i$, $r_2 = -1 - i$. Lösningarna blir då $y_h = e^{-x}(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x))$. $2x$ är polynom av 1-sta grad, så vi letar efter lösningar $Ax + B$. Det blir $2A + 2Ax + 2B = 2x$, alltså $B = -A$, $A = 1$, och $y_p = x - 1$.

Lösningaen är $y = e^{-x}(C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)) + x - 1$.

(b) $y(0) = 0$ medför $C_2 - 1 = 0$, i.e. $C_2 = 1$. $y'(0) = 0$, betyder $-C_2 + C_1 + 1 = 0$. Eftersom vi vet att $C_2 = 1$, ser vi att $C_1 = 0$ och $y = e^{-x}\cos(x) + x - 1$.

8. (a) Formulera och bevisa integralkalkylens huvudsats. (3 p)

   (b) Det följer från geometrisk betydelse av integral, att integral över ett interval som är symmetrisk kring noll av en udda funktion är noll. Medför integralkalkulens huvudsats att en primitiv funktion till en udda funktion är noll? (Om ”ja”visa resonemanget, om ”nej” - vad medför den?) (1 p)

(b) Svaret är nej”, integralkalkulens huvudsats medför att för udda functioner primitivfunktion F uppfyller $F(x) - F(-x) = 0$, i.e. $F(x) = F(-x)$, dvs. en primitiv funktion till en udda funktion är alltid jämn.

[1]Injektiv betyder att det gäller för alla punkter x_1 och x_2 i $\mathbb{R}$, om $x_1 \neq x_2$ sedan$f(x_1) \neq f(x_2)$.
[2]Surjektiv betyder att för alla $y \in \mathbb{R}$ det finns något $x \in \mathbb{R}$ med $f(x) = y$.