Simpsons formel

I ansnitt 7.11 i Person-Böiers beskrivs hur man genom att approximera en funktion med styckvis konstanta respektive styckvis linjära funktioner får rektangelmetoden respektive trapetsmetoden för numerisk beräkning av integraler. Här skall vi beskriva hur man genom att i stället approximera med styckvisa andragradspolynom får den så kallade Simpsons formel.

Låt f vara en funktion och a, b och c tre givna punkter. Sätt

$$p(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} \ .$$

Då är $p(x)$ ett andragradspolynom och $p(a) = f(a)$, $p(b) = f(b)$ och $p(c) = f(c)$. Om vi speciellt antar att $a < b$, $h = b - a$ och att c är mittpunkt på $[a, b]$ så gäller $c - a = \frac{h}{2}$, $b - c = \frac{h}{2}$ och vi får

$$p(x) = \frac{2}{h^2}\Big(f(a)(x-b)(x-c) + f(b)(x-a)(x-c) - 2f(c)(x-a)(x-b)\Big) \ .$$

En kalkyl ger

$$\int_a^b (x-b)(x-c)dx = \int_a^b (x-a)(x-c)dx = \frac{h^3}{12} \text{ och } \int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{h^3}{6} \ .$$

Detta ger

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{2}{h^2}\Big((f(a)+f(b))\frac{h^3}{12} + 2f(c)\frac{h^3}{6}\Big) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\Big)$$

och alltså

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f(\tfrac{a+b}{2}) + f(b)\Big) \qquad (1.1)$$

Låt $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = b$ vara en partition av $[a, b]$ i fyra lika stora delintervall och c vara mittpunkten på $[a, b]$. Då ger (1.1)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \approx$$
$$\frac{c-a}{6}\Big(f(a) + 4f(\tfrac{a+c}{2}) + f(c)\Big) + \frac{b-c}{6}\Big(f(c) + 4f(\tfrac{c+b}{2}) + f(b)\Big) =$$
$$\frac{b-a}{12}\Big(f(a) + 4f(\tfrac{a+c}{2}) + 2f(c) + 4f(\tfrac{c+b}{2}) + f(b)\Big) =$$
$$\frac{b-a}{3 \cdot 4}\Big(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\Big) .$$

Upprepar vi detta resonomang och delar in $[a, b]$ i ett *jämnt* antal intervall så får vi följande sats.

Sats 1.1. (Simpsons formel) *Om $f(x)$ är fyra gånger kontinuerligt deriverbar på intervallet $[a, b]$ så gäller*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3 \cdot n}\Big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\Big)+R_n$$

där

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)| .$$

Vi utelämnar beviset av uppskattningen av felet R_n och avslutar med ett Matlabprogram för numerisk beräkning av integraler med hjälp av Simpsons formel.

```
function I=simpson(f,a,b,n)
%programmet beräknar integralen av funktionen f på intervallet [a,b]
%med Simpsons formel. n är antalet steg och måste vara ett jämnt heltal.
%f kan anges som en m-filsfunktion eller som en anonym funktion.


if not(n/2==floor(n/2))
   error('Antalet intervall måste vara jämnt');
else
h=(b-a)/n;
S=f(a);
for i=1:2:n-1
    x(i)=a+h*i;
```

```
    S=S+4*f(x(i));
end
for i=2:2:n-2
     x(i)=a+h*i;
     S=S+2*f(x(i));
end
S=S+f(b);
I=h*S/3;
end
```

En variant på programmet som bättre utnyttjar Matlabs förmåga att räkna med vektorer är följande.

```
function I=simpson2(f,a,b,n)
%programmet beräknar integralen av funktionen f på intervallet [a,b]
%med Simpsons formel. n är antalet steg och måste vara ett jämnt heltal
%f kan anges som en m-filsfunktion eller som en anonym funktion
if not(n/2==floor(n/2))
   error('Antalet intervall måste vara jämnt');
else
h=(b-a)/n;
S=f(a);
i=1:2:n-1;
x=a+h.*i;
y=f(x);
S=S+4*sum(y);
i=2:2:n-2
x=a+h.*i;
y=f(x);
S=S+2*sum(y);
S=S+f(b);
I=h*S/3;
end
```