MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Lösningar till
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2018-10-29.

1. Se boken sidorna 215-216 och 218.

2. Se boken sidorna 177-178.

3. För definitionerna se sidan 61 i boken. Man kan t ex ta $f_i(x) = x$ för alla $x \in \mathbb{N}$ och $g_s(x) = \lfloor |x| \rfloor$ (heltalsdelen av absolutbeloppet). Varken f_s eller g_i existerar eftersom de reella talen är överuppräkneliga.

4. (a) Vi testar successivt att dividera med minsta möjliga primtal och får

$$60291 = 3 \cdot 20097 = 3^2 \cdot 6699 = 3^3 \cdot 2233 = 3^3 \cdot 7 \cdot 319 = 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29.$$

   (b) Alla positiva delare är på formen

$$3^a \cdot 7^b \cdot 11^c \cdot 29^d, \text{ där } 0 \le a \le 3, \ 0 \le b, c, d \le 1.$$

   Totalt ger multiplikationsprincipen att det finns $4 \cdot 2^3 = 32$ positiva delare.

5. Vi sätter

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \text{ och } f(n) = (n+1)! - 1$$

och ska alltså visa att $s(n) = f(n)$ för alla positiva heltal n.

Vi gör ett induktionsbevis och börjar med basfallet $n = 1$ som ger

$$s(1) = \sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1$$

och

$$f(1) = (1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1.$$

Alltså stämmer likheten då $n = 1$.

Antag nu att $s(n) = f(n)$ för något positivt heltal n. Vi ska visa att i så fall gäller det också att $s(n+1) = f(n+1)$. Vi får genom att utnyttja antagandet att

$$\begin{aligned} s(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = s(n) + (n+1)(n+1)! \\ &= f(n) + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\ &= (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 \\ &= (n+2)! - 1 = f(n+1). \end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därmed att $s(n) = f(n)$ för alla positiva heltal n.

6. (a) Välja 5 bland $9 + 7 = 16$ kan göras på

$$\binom{16}{5} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \cdot 1 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 4368$$

olika sätt.

(b) Om det ska vara minst två av var och en av de två typerna så kan det antingen vara 2 ljusa och 3 mörka eller vice versa vilket ger

$$\binom{9}{2}\binom{7}{3} + \binom{9}{3}\binom{7}{2} = 36 \cdot 35 + 84 \cdot 21 = 3024.$$

7. Vi ska visa att den är relexiv, symmetrisk och transitiv.

Reflexiv. Eftersom H också är en grupp så kommer speciellt identiteten e i G också finnas i H. Vi får då att

$$g\mathcal{R}g \iff g \star g^{-1} = e \in H$$

vilket stämmer och alltså är den reflexiv.

Symmetrisk. Antag att $g\mathcal{R}h$ så att $g \star h^{-1} \in H$. Vi ska visa att $h\mathcal{R}g$ dvs. att $h \star g^{-1} \in H$. Men detta är inversen till $g \star h^{-1}$ eftersom

$$(h \star g^{-1}) \star (g \star h^{-1}) = h \star ((g^{-1} \star g) \star h^{-1}) = h \star (e \star h^{-1}) = h \star h^{-1} = e.$$

Eftersom H är en grupp så kommer varje element i H att ha sin invers i H och alltså $h\mathcal{R}g$.

Transitiv. Antag att $g\mathcal{R}h$ och $h\mathcal{R}j$ så att $g \star h^{-1} \in H$ och $h \star j^{-1} \in H$. Vi ska visa att $g\mathcal{R}j$ dvs. att $g \star j^{-1} \in H$. Eftersom H är en grupp så gäller det att om $a, b \in H$ så gäller att $a \star b \in H$. Vi har att

$$(g \star h^{-1}) \star (h \star j^{-1}) = g \star ((h^{-1} \star h) \star j^{-1}) = g \star (e \star j^{-1}) = g \star j^{-1}.$$

Alltså gäller att $g \star j^{-1} \in H$ och därmed $g\mathcal{R}j$ vilket var det vi skulle visa.

Eftersom den är reflexiv, symmetrisk och transitiv så är det en ekvivalensrelation.

Vi får per definition att

$$\begin{aligned}[e] &= \{g \in G : g\mathcal{R}e\} = \left\{g \in G : g \star e^{-1} \in H\right\} \\ &= \{g \in G : g \star e \in H\} = \{g \in G : g \in H\} = H,\end{aligned}$$

8. Vi gör induktion över n. Basfallet $n = 1$ stämmer för talet 5 uppfyller uppenbart villkoren att alla siffror är udda och $5^1 \mid 5$.

Antag nu att det finns ett tal a som består av n udda siffror och som är delbart med 5^n. Vi ska visa att det i så fall finns ett tal med $n+1$ siffror som är delbart med 5^{n+1}. Betrakta de fem $(n + 1)$-siffriga talen a_1, a_3, a_5, a_7, a_9 man får om man sätter en etta, trea, femma, sjua respektive nia framför siffrorna i a. Alla dessa tal har bara udda siffror eftersom a bara har udda siffror. Vi ska visa att något av dessa tal är delbart med 5^{n+1} och därmed skulle induktionssteget vara klart. Vi har att

$$a_i - a = i \cdot 10^n = i \cdot 2^n \cdot 5^n \iff a_i = a + i \cdot 2^n \cdot 5^n$$

och alltså gäller det att $5^n \mid a_i$ för alla i. T.ex. är $a_1 = m \cdot 5^n$ för något $m \in \mathbb{N}$. Vi har att

$$a_9 - a_7 = a_7 - a_5 = a_5 - a_3 = a_3 - a_1 = 2 \cdot 10^n = 2^{n+1} \cdot 5^n.$$

Sätt $k = 2^{n+1}$. Då gäller att $k \not\equiv 0 \pmod{5}$. Vi får att

$$\begin{aligned}
a_1 &= m \cdot 5^n \\
a_3 &= a_1 + k \cdot 5^n = (m+k) \cdot 5^n \\
a_5 &= a_3 + k \cdot 5^n = (m+2k) \cdot 5^n \\
a_7 &= a_5 + k \cdot 5^n = (m+3k) \cdot 5^n \\
a_9 &= a_7 + k \cdot 5^n = (m+4k) \cdot 5^n
\end{aligned}$$

Eftersom $k \not\equiv 0 \pmod{5}$ så kommer talen

$$f_1 = m,\ f_3 = m+k,\ f_5 = m+2k,\ f_7 = m+3k,\ f_9 = m+4k$$

att anta alla möjliga klasser modulo 5 och därmed kommer exakt en av dessa att vara delbar 5 och om f_i är delbart med 5 så kommer a_i vara delbart med 5^{n+1} vilket var precis det vi ville visa.

Enligt induktionsprincipen är det därmed sant för alla positiva heltal n.