MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2019-01-04.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Andreas Petersson, 031-772 5325. Examinator nås på: 031-772 5303.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Bevisa att den diofantiska ekvationen $ax + by = c$ är lösbar om och endast om $\text{sgd}(a, b) \mid c$. (3p)

2. Ge definitionen av att en mängd R med en addition och en multiplikation är en kropp (utan att referera till begreppet ring). Ge ett exempel på en ring som inte är en kropp och som har ändligt många element. (4p)

3. Formulera definitionerna av att en funktion är injektiv respektive surjektiv. (2p)

4. (a) Beräkna $\text{SGD}(1085, 756)$.
   (b) Bestäm alla lösningar $x, y \in \mathbb{Z}$ till $1085x + 756y = 7$. (3p)

5. Vi definierar en rekursiv talföljd a_n för $n \in \mathbb{N}$ genom

$$\begin{cases} a_0 = 2, \\ a_1 = 1, \\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ för } n \geq 2. \end{cases}$$

   Visa att $a_n = 2^n + (-1)^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (3p)

6. Bland åtta pojkar och sex flickor ska man välja ut sex personer. På hur många sätt kan man göra det om

   (a) man får välja helt fritt.
   (b) det måste vara tre flickor och tre pojkar.
   (c) det måste vara minst två pojkar.

   Det ska vara explicita svar (d v s inga binomialkoefficienter) och motiveringar för full poäng. (3p)

Var god vänd!

7. Låt $n \geq 2$ vara ett heltal och betrakta relationen R på mängden $\mathbb{Z}$ av alla heltal, som definieras av

$$xRy \iff x \equiv y + 3 \pmod{n}.$$

För vilka n är relationen reflexiv? För vilka n är den symmetrisk? För vilka n är den transitiv? (4p)

8. Följande är ett känt faktum (som ni har lärt er/kommer att lära er i envariabelanalysen):

Sats: För $n \in \mathbb{Z}_+$, låt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ är strängt växande och $\lim_{n\to\infty} a_n = e$, där $e \approx 2,72$ är basen för den naturliga logaritmen.

Givet detta (som du alltså inte behöver bevisa), bevisa följande:

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ : \; n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(Om du lyckas bevisa olikheten utan tipset så får du ändå full poäng.) (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade senast den 20 januari. Skrivningar kan därefter granskas och hämtas ut på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.