MATEMATIK
Göteborgs Universitet
Tentamen i Matematik 1 (MMG200), Inledande algebra.
Datum: 2018-10-29.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt och examinator Stefan Lemurell: 031-772 5303.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För godkänt krävs minst 12 poäng och för väl godkänt minst 18 poäng.

---

1. Låt G vara en mängd med en operator $\star$. Ge de fyra axiomen att $(G, \star)$ är en abelsk grupp. (2p)

2. Antag att $n \geq 1$ och $0 \leq k \leq n-1$. Bevisa att då gäller att

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(3p)

3. Formulera definitionerna av att en funktion är injektiv respektive surjektiv.

   Ge om det är möjligt exempel på en injektiv f_i respektive en surjektiv funktion f_s med de naturliga talen som definitionsmängd och de reella talen som målmängd.

   Ge också om det är möjligt exempel på en injektiv g_i respektive en surjektiv funktion g_s med de reella talen som definitionsmängd och de naturliga talen som målmängd.

   Totalt alltså 4 olika funktioner. I de eventuella fall då det inte går så motivera varför. (4p)

4. Observera att svaren i denna frågan i vanlig ordning måste motiveras.

   (a) Primtalsfaktorisera 60291.

   (b) Hur många positiva delare har 60291.

   (3p)

5. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$$

   för alla positiva heltal n. (3p)

Var god vänd!

6. Stefan har två lådor med chokladpraliner som alla är olika. I den ena lådan finns det 9 praliner med ljus choklad och i den andra finns det 7 praliner med mörk choklad. Stefan ska välja ut 5 stycken praliner som han lägger i en skål för att njuta av senare när han sitter och rättar tentor. Hur många olika möjliga val har Stefan om

   (a) han får välja helt fritt mellan alla praliner?

   (b) han måste välja minst två ljusa och minst två mörka praliner?

   För full poäng krävs att man svarar med explicita heltal, d v s alla eventuella fakulteter och andra symboler ska vara uträknade. Räkningarna ska också motiveras. (4p)

7. Låt $(G, \star)$ vara en abelsk grupp och låt $(H, \star)$ vara en delgrupp till $(G, \star)$, dvs. $H \subseteq G$ och $(H, \star)$ är också en abelsk grupp. Vi definierar en relation $\mathcal{R}$ på G genom att för $a, b \in G$ säga att

$$a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow a \star b^{-1} \in H.$$

   (a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation på G.

   (b) Bestäm ekvivalensklassen av e, $[e]$, där e är identiteten i G (och H). (3p)

8. Bevisa att för varje positivt heltal n så finns det ett n-siffrigt heltal som är delbart med 5^n och som bara innehåller udda siffror. (Tips: Gör induktion över n och titta på de fem tal man får när man till ett givet tal lägger till en udda siffra längst fram.) (3p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 12 november. Ett granskningstillfäller kommer att meddelas på kurshemsidan. Därefter kan skrivningar granskas och hämtas ut på expeditionen.

LYCKA TILL! Stefan.