

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

1. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är kontinuerlig på den kompakta rektangeln $\Delta = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ så är f integrerbar över Δ . (3p)
2. (a) Definiera vad som menas med att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält i ett öppet område Ω i $\mathbb{R}^2$. (4p)
(b) Visa att om $\mathbf{F} = (P, Q)$ har en potential U i Ω så är $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a})$ om γ är en kurva i Ω med begynnelsepunkt $\mathbf{a}$ och slutpunkt $\mathbf{b}$.
3. Formulera och bevisa Dirichlets test för konvergens av en serie av typen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. (3p)
(Du behöver inte bevisa Abels summationsformel.)
4. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $3x + 2y + z = 2$ (3p)
5. Beräkna kurvintegralen $\int_C \frac{x^3 dy - (y^3 + e^x) dx}{(x^2 + y^2)^2}$ där C är cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ genomlöst moturs. (3p)
6. Beräkna $\iiint_D z e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz$ där D är det område där $z > \sqrt{x^2 + y^2}$. (3p)
7. För vilka komplexa tal z konvergerar potensserien $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{4k}}{k 4^k}$? (3p)
8. Visa att funktionsserien $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \arctan(1 + \frac{x}{k})}{(\ln k)^2}$ konvergerar kikformigt på varje begränsat intervall. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2 + a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2 - a} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n), \quad \text{där} \quad \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad n \rightarrow \infty.$$