MATEMATIK | **Hjälpmedel: medföljande formelblad**
Göteborgs Universitet | Datum: 2011-08-22 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt:
tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. (a) Definiera vad som menas med ett potentialfält i ett öppet område $\Omega \in \mathbf{R^2}$. (3p)

   (b) Visa att om $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ är ett potentialfält med potential av klass C^2 i Ω så är $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i Ω.

2. Bevisa Abels partiella summationsformel: (3p)
$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_n - a_{m+1}B_m + \sum_{k=m+1}^{n} (a_k - a_{k+1})B_k \text{ där } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

3. Visa att för varje komplex potensserie $\sum_0^\infty c_n z^n$ så gäller exakt ett av följande tre. (4p)

   (a) Serien är konvergent för alla z,

   (b) serien är konvergent endast för $z = 0$ eller

   (c) det finns ett tal $R > 0$ så att serien är absolutkonvergent för $|z| < R$ och divergent för $|z| > R$.

4. Beräkna $\iint_D y\,dx\,dy$, där D är parallellogrammen som ges av olikheterna $0 < x - 2y < 2$ och $-1 < x + y < 1$ (3p)

5. Beräkna arean av ytan med parameterframställningen $x = 2uv$, $y = u^2$, $z = 2v^2$ för $1 < u < 2$ och $1 < v < 3$. (3p)

6. Bestäm konvergensradien R till potensserien $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(1+2^k)z^{2k}}{k(\ln k)(\ln\ln k)^2}$ och visa att den är absolutkonvergent på mängden $\{z : |z| \leq R\}$? (3p)

7. Beräkna $\iint_S xy\,dy\,dz - 2y\,dz\,dx + (z - x)\,dx\,dy$ där S är begränsningsytan till den kropp som begränsas av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och planet $z = 4$ med normalriktning utåt. (3p)

8. Bestäm en potensserie som är lösning till differentialekvationen $xy" + y' - y = 0$, $y(0) = 1$. Bestäm också dess konvergensradie. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1} B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1} B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1} B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1} B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2} B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1} B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$