

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

1. Formulera och bevisa Greens formel. (3p)
2. Formulera och bevisa Weierstrass majorantsats. (3p)
(Triangelolikheten för absolutkonvergenta serier får anses bekant.)
3. Antag att (f_n) är en följd C^1 -funktioner på ett intervall $I =]a, b[$ som konvergerar i minst en punkt i I . Visa att om då (f'_n) konvergerar likformigt på I så konvergerar (f_n) likformigt på I mot en C^1 -funktion f med $f' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ (4p)
4. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D x^4 - y^4 dx dy$ där D är området som ges av olikheterna (3p)
 $0 \leq y \leq x$ och $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
5. Beräkna flödet ut ur cylinderområdet $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ av vektorfältet (3p)
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^2 z, x^2 z)$$
6. För vilka reella x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} (n + \frac{1}{n})x^n$? Bestäm också summan av serien (3p)
uttryckt i elementära funktiner.
7. Beräkna arean av den del av ytan $z = x^2 - y^2$ som bestäms av olikheterna (3p)
 $z > 0$ och $x^2 + y^2 < 1$.
8. Visa att $\sum_1^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1 + nx^2)}$ konvergerar likformigt på hela $\mathbf{R}$ om $\alpha > 1/2$. (3p)

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2 + a} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2 - a} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x - \sqrt{a}}{x + \sqrt{a}} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|, \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2 + a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e} \right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n), \quad \text{där} \quad \epsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{då} \quad n \rightarrow \infty.$$