MATEMATIK **Hjälpmedel: Formelblad på baksidan**
Göteborgs Universitet Datum: 2013-08-27 kl. 08.30–12.30
Tentamen Telefonvakt: Jacob Leander.
tel. 0703 088304

Flervariabelanalys, del 2, MMG300.

Skriv din kod på samtliga inlämnade papper. Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 12 - 17 p. ger betyget G, 18 - 25 p. ger betyget VG.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida.

---

1. Bevisa Abels partiella summationsformel: (3p)
$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k b_k = a_{n+1}B_n - a_{m+1}B_m + \sum_{k=m+1}^{n}(a_k - a_{k+1})B_k \text{ där } B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

2. Antag att $\boldsymbol{F}$ är ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen mängd Ω. Visa att om kurvintegralen $\int_\gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ är oberoende av vägen för alla kurvor $\gamma \in \Omega$ så har $\boldsymbol{F}$ en potential i Ω. (3p)

3. Antag att (f_n) är en föjd C^1-funktioner på ett intervall $I =]a, b[$ som konvergerar i minst en punkt i I. Visa att om då (f_n') konvergerar likformigt på I så konvergerar (f_n) likformigt på I mot en C^1-funktion f med $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$ (4p)

4. Beräkna volymen av den kropp som ges av olikheterna $-\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}$ (3p)

5. För vilka x konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$? Bestäm också summan av serien uttryckt i elementära funktiner. (3p)

6. Beräkna dubbelintegralen (3p)
$$\iint_D x^2 e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$
Där D ges av olikheterna $x + y > 0$ och $y > 0$.

7. Beräkna $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$ där S är ytan som ges av parameterframställningen $(x, y, z) = (u^2v, uv^2, uv)$, $0 < u < 2$, $0 < v < 2$ orienterad så att normalvektorn har positiv z-koordinat i punkten $(1, 1, 1)$. (3p)

8. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma (e^{x^2} - y)\, dx + (2z - \sin y)\, dy + \ln(1 + z^2)\, dz$$
då γ är kurvan $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, \cos t)$, t går från 0 till 2π.

Lycka till!
Sven

Formelblad

Trigonometriska formler

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Några integraler (integrationskonstanter är utelämnade)

$$\int \frac{1}{x^2+a}\, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \arctan \frac{x}{\sqrt{a}}\ , \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{x^2-a}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \ln \left| \frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{a}} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\, dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}, \quad a > 0. \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|\ , \quad a > 0.$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left(x\sqrt{x^2+a} + a \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)$$

Malaurinutvecklingar

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}B(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^{n+1}B(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \cdot x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n + x^{n+1}B(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n+1}B(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+2}B(x)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + x^{2n+1}B(x)$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot (1 + \epsilon_n)\ , \ \text{där} \quad \epsilon_n \to 0 \quad \text{då } n \to \infty.$$