

- ① Sats 6.3 i P-B.
 ② Sats 9.2 i P-B.
 ③ Sats 2.9 i GLO.

Lösningar till
 MMG 300, II
 2011-05-31

④ Skärningen: $x^2 + y^2 \leq 2 - 3x - 2y \Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 \leq \frac{21}{4}$.

Volymen = $\iint_D (2 - 3x - 2y) - (x^2 + y^2) dx dy =$

$= \iint_D \left[\frac{21}{4} - (x + \frac{3}{2})^2 - (y + 1)^2 \right] dx dy =$

$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{21}}{2}} \left(\frac{21}{4} - r^2 \right) r dr \right) d\theta =$

$= \frac{\pi}{2} \left[r^2 \left(\frac{21}{4} - r^2 \right) \right]_0^{\frac{\sqrt{21}}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{21}{4} \right)^2 = \frac{441\pi}{32}$



⑤ $I = \int_C \frac{x^3 dy - (y^3 + e^x) dx}{(x^2 + y^2)^2} = \int_C -(y^3 + e^x) dx + x^3 dy$ om $x^2 + y^2 = 1$

Greens formel ger då med $D: x^2 + y^2 \leq 1$

$I = \iint_D (3x^2 + 3y^2) dx dy = 3 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 \cdot r dr \right) d\theta = \frac{3\pi}{2}$

⑥ Sfäriska koordinater:

$I = \iiint_D z e^{-x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz = \iiint_D r^3 e^{-r^2} \cos\theta \sin\theta dr d\theta d\varphi$

$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2z^2 = r^2 \Leftrightarrow 2\cos^2\theta = 1$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ (obs $z > 0$ ger $\theta > 0$). Därmed är

$D: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r < \infty$

$I = 2\pi \int_0^{\pi/4} (\cos\theta \sin\theta) d\theta \int_0^\infty r^3 e^{-r^2} dr =$

$= \pi \left[\sin^2\theta \right]_0^{\pi/4} \left(\left[-\frac{r^2}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty + \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \right) = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$

⑦ Sätt $w = -z^4$ och studera serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} 4^k w^k$

Rotkriteriet ger $\left| \frac{1}{k} 4^k w^k \right|^{1/k} = \frac{|w|}{4} \rightarrow \frac{|w|}{4}$

Konvergensradie $R = 4$.

För $|w| = 4$ sätter vi $w = 4e^{i\theta}$ och får

serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} e^{ik\theta}$. Den konvergerar för $\theta \neq m \cdot 2\pi$

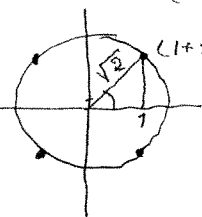
eftersom $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ och $\sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$ är begränsad.

Serien konvergerar för $|w| \leq 4$, $w \neq 4$.

Det betyder $|z| \leq \sqrt{2}$, $z^4 \neq 4$

Men $z^4 = -4 = 4e^{i\pi + m \cdot 2\pi} \Leftrightarrow |z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{\pi}{4} + m \cdot \frac{\pi}{2}$

Svar: $|z| \leq \sqrt{2}$, $z \neq \pm 1 \pm i$.



⑧ $\sum_{k=2}^\infty u_k(x)$, där $u_k(x) = \frac{(-1)^k \arctan(1 + \frac{x}{k})}{(\ln k)^2}$

För $x = 0$ får vi serien

$\frac{\pi}{4} \sum_{k=2}^\infty \frac{(-1)^k}{(\ln k)^2}$ som är konvergent enligt Leibniz.

$|u'_k(x)| = \frac{1}{1 + (1 + \frac{x}{k})^2} \frac{1}{k \ln^2 k} \leq \frac{1}{k \ln^2 k}$

$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^\infty = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t^2} dt$ som är konvergent.

Då är $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln^2 k}$ konvergent och därmed

är $\sum_{k=2}^\infty u'_k(x)$ likformigt konvergent enligt Weierstrass. Satsen om termvis

derivering ger slutligen att

$\sum_{k=2}^\infty u_k(x)$ konvergerar likformigt på

Varje begränsat intervall.