

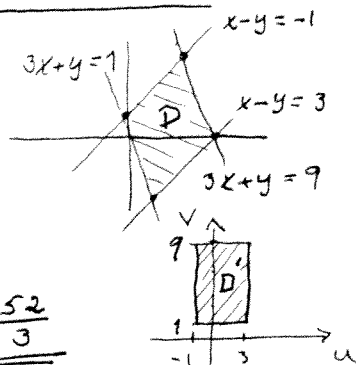
Lösningar till
MMG 2001, 2
2013-01-15

- ① Sats 6.3 ; P-B.
② Sats 2.9 ; GLÖ
③ Sats 3.5 ; GLÖ

④ Sätt $\begin{cases} u = x - y \\ v = 3x + y \end{cases}$

$$\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \text{ dvs } \frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{4}$$

$$\iint_D (x-y)\sqrt{3x+y} \, dx dy = \frac{1}{4} \iint_{D'} u \sqrt{v} \, du dv = \frac{1}{4} \int_{-1}^9 u \, du \int_1^9 \sqrt{v} \, dv = \frac{1}{4} \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-1}^9 \left[\frac{2}{3} v^{3/2} \right]_1^9 = \underline{\underline{\frac{52}{3}}}$$



⑤ $\left| \frac{n+3}{\sqrt{1+n^3}} z^n \right|^{1/n} = \left(\frac{n^3+1}{\sqrt{n^3+1}} \right)^{1/n} \frac{1}{(n^{1/n})^{3/2}} 3|z| \rightarrow 3|z| \text{ då } n \rightarrow \infty$

Det betyder att konvergensraden, $R = \frac{1}{3}$

Om $|z| = \frac{1}{3}$ är $\left| \frac{n+3}{\sqrt{1+n^3}} z^n \right| = \frac{n^3+1}{\sqrt{n^3+1}} \frac{1}{n^{3/2}} \rightarrow 1$ då $n \rightarrow \infty$.

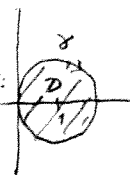
Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är konvergent ($\frac{3}{2} > 1$)

Så är potensserien absolutkonvergent

då $|z| = \frac{1}{3}$. Svar: konvergent för $|z| \leq \frac{1}{3}$

⑥ Greens formel ger

$$I = \int_D 6xy \, dx + (x^3 - 3xy^2) \, dy = - \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} (x^3 - 3xy^2) - \frac{\partial}{\partial y} (6xy) \right) dx dy = \iint_D (6x - 3x^2 - 3y^2) dx dy = 3 \iint_D (1 - (x-1)^2 - y^2) dx dy$$

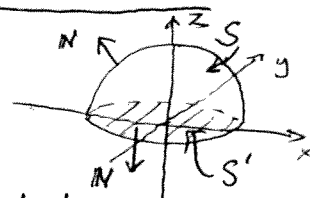


Polära koordinater kring $(1, 0)$: $\begin{cases} x = 1 + r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$

Vi får $I = 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \, dt =$

$$6\pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 6\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$$

⑦ Lägg till ytan S' med normal nedåt så blir $S + S'$ en sluten yta och Gauss' sats ger



$$\begin{aligned} \iint_{S+S'} (3xz^2, y^3, 1) \cdot \hat{N} \, dS &= \iiint_D (3z^2 + 3y^3) \, dx dy dz = \\ &= \{ \text{sfäriska} \} = 3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 - r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) r^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta dr = \\ &= 3 \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(2\pi \sin \theta - \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) \sin^3 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{3\pi}{5} \int_0^{\pi/2} (2 \sin \theta - \sin \theta) \, d\theta = \frac{3\pi}{5} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = \\ &= \frac{3\pi}{5} \left[-\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4\pi}{5} \text{ och} \\ \iint_S &= \frac{4\pi}{5} - \iint_{S'} (3xz^2, y^3, 1) \cdot (0, 0, -1) \, dS = \frac{4\pi}{5} + \iint_{S'} 1 \, dS = \underline{\underline{\frac{9\pi}{5}}} \end{aligned}$$

⑧ $f_n(x) = n e^{\frac{x}{x+n}} - n = x \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{x+n}}}{\frac{x}{x+n}} \rightarrow x$ då $n \rightarrow \infty$.

Vi visar att konvergensen är likformig:

$$\begin{aligned} |f_n(x) - x| &= |n e^{\frac{x}{x+n}} - n - x| = \{ \text{McLaurin} \} = \\ &= \left| n \left(\frac{x}{x+n} + \left(\frac{x}{x+n} \right)^2 B(x,n) \right) - x \right| = \left| n x \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{x}{x+n} \right)^2 B(x,n) \right| \leq \\ &= \left| \frac{x^2}{x+n} + \left(\frac{x}{x+n} \right)^2 B(x,n) \right| \leq \{ B \text{ begr. } 0 \leq x \leq 1 \} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} C \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Detta visar att konvergensen är likformig och

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx = \int_0^1 x \, dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$