

Lösningar till
MMG 300-2
2014-01-14

- ① Sats 3.4 i GLO.
- ② Sats 6.4 i P-B.
- ③ Sats 3.3 i GLO

④ Parameterisering: $\begin{cases} x = \cos t & dx = -\sin t dt \\ y = \sin t & dy = \cos t dt \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$I = \int_0^{\pi/2} [(\cos t + \sin t) (-\sin t) + \cos t + \sin t \cos t] dt$$

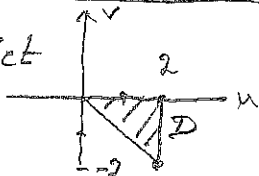
$$= \int_0^{\pi/2} (\sin t (\cos^2 t - \cos t) - \sin^2 t) dt$$

$$= \left[-\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t dt$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{6} - \frac{\pi}{4}$$

⑤ Variabelsubst: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$ ger området

D: fig. $\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{1}{2}$



$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-u}^0 e^{-v/u} dv du = \frac{1}{2} \int_0^2 -u \left[e^{-v/u} \right]_{-u}^0 du$$

$$= \frac{1}{2} (e-1) \int_0^2 u du = \frac{1}{2} (e-1) \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^2 = \underline{\underline{e-1}}$$

⑥ Genom xy -planet är flödet = 0 eftersom $(0, x^2 y, 0) \perp$ normalvektorn $(0, 0, 1)$.

Vi kan därför sluta ytan och använda Gauss' sats: Flödet =

$$\iint_S x^2 y \, dz dx + y^2 z \, dx dy =$$

S = 

$$\iiint_D (x^2 + y^2) \, dx dy dz = \{ \text{sfäriska koordinater} \} =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \left(\int_0^a r^4 dr \right) d\theta = \frac{2\pi a^5}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{2\pi a^5}{5} \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{4\pi a^5}{15}}}$$

⑦ $\left(\frac{1+3^n}{n^{1/3}} |z|^{1/n} \right)^{1/n} = 3 \frac{(3^n+1)}{(n^{1/3})^{1/3}} |z|^{1/n} > 3|z|^{1/n} < 1 \Leftrightarrow |z| < 3^{-1/n}$

Dvs $R = 3^{-1/n}$ och serien konv. för $|z| < 3^{-1/n}$, div. för $|z| > 3^{-1/n}$.

För $|z| = 3^{-1/n}$ sätter vi $z = 3^{-1/n} e^{i\theta}$ och får serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^{-n}}{n^{1/3}} e^{i\theta}$$

Vi använder Dirichlets test.

$$\frac{1+3^{-n}}{n^{1/3}} \searrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\theta n}$$

är begr. för $\theta \neq m \cdot 2\pi$

Dvs serien konvergent för $\theta \neq m \cdot 2\pi$ dvs $\theta \neq m \frac{\pi}{2}$ eller m.a.o. $z \neq \pm 3^{-1/n}, \pm 3^{-1/n} i$. I dessa punkter får vi den divergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^{-n}}{n^{1/3}}$.

Svar: $|z| \leq 3^{-1/n}, z \neq \pm 3^{-1/n}, z \neq \pm 3^{-1/n} i$

⑧ Sätt $u_k(x) = e^{-x/k} - x/k, x > 0$. Vi deriverar:

$$u'_k(x) = e^{-x/k} \left(-\frac{1}{k} + \frac{x}{k^2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = k$$

Vi ser att $u_k(k)$ är maximum. För $k > R$ är då $|u_k(x)| \leq u_k(R) = e^{-R/k} - \frac{R}{k} < (e^{-R})^k$

Eftersom $e^{-R} < 1$ är $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{-R})^k$ en konvergent geometrisk serie och enligt Weierstrass är då $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ likformigt konvergent.